“就像从帽子里拎出兔子”

——从陈难先的一个工作说起

王正行[†]

(北京大学物理学院　北京　100871)

摘　要　扼要介绍了声子比热和黑体辐射的逆问题,以及陈难先用数论莫比乌斯反演定理给出的解.英国《自然》(Nature)杂志主编玛多仕对陈难先这个工作的长篇评论,对促成和推动这一领域随后20年来的快速发展起了重要的作用.

关键词　声子比热,黑体辐射,逆问题,莫比乌斯反演,玛多仕的评论

“As if pulling a rabbit out of a hat”

——On a work of Nanxian Chen

WANG Zheng-Xing[†]

(*School of Physics, Peking University, Beijing* 100871, *China*)

Abstract　A brief review is presented of two inverse problems concerning the specific heat of phonons and black body radiation, and the solution given by Nanxian Chen using the M¨obius inversion formula in number theory. The page－long comment of John Maddox in Nature on Chen's work played an important role in promoting this area of research in the subsequent twenty years.

Keywords　specific heat of phonons, black body radiation, problems of inversion, Möbius inversion, comment of John Maddox

陈氏的做法“就像(魔术师)从帽子里拎出兔子”,这是英国《自然》(Nature)杂志主编玛多仕(John Maddox,1925—2009)对我国物理学家陈难先(清华大学物理系教授,中国科学院院士)的一个工作的评论[1].这个工作所解决的是近代物理中的一类反问题,它们的基础和出发点是普朗克的辐射量子论和爱因斯坦－德拜(P. Debye)的固体比热量子论.

物理学是逻辑的,论述的次序是从原因推出结果.比如,从太阳与行星之间的万有引力推算出行星的运动,这是牛顿力学表述的问题.但是物理的研究却是经验的,没有一定之规,既可从原因来探索结果,也可从结果反推出原因.从行星运动的不规则性来推测太阳系还存在未知的行星,这就是当年发现海王星和冥王星的问题.在物理学中,把前者称为正问题,后者称为反问题或逆问题.而正如玛多仕所说,物理问题往往是反问题.因为与因果的逻辑顺序相反,求解物理上的反问题一般没有逻辑和系统的方法,常常是靠物理或数字上的直觉,靠猜测与试探,比求解正问题要难.

普朗克提出黑体辐射定律和创立量子论后不久,爱因斯坦和德拜就建立了固体比热的量子理论.根据这个理论,固体处于热平衡时的晶格振动能是(见文献[2],274页)

$$E=\int Vg(\nu)\mathrm{d}\nu\cdot\frac{h\nu}{\mathrm{e}^{h\nu/kT}-1}\quad,$$

其中V是固体体积,ν是晶格振动频率,$g(\nu)$是振动频谱,h是普朗克常数,T是绝对温度.由此即得比热

2010－06－25收到

† Email:cswang@pku.edu.cn

$$C=\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V=k\int Vg(\nu)\,\mathrm{d}\nu\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2\frac{\mathrm{e}^{h\nu/kT}}{(\mathrm{e}^{h\nu/kT}-1)^2}\quad . \tag{1}$$

爱因斯坦的模型相当于单一频率的 $g(\nu)=3N\delta(\nu)/V$. 德拜假设固体是连续均匀弹性介质，给出频谱

$$g(\nu)=\begin{cases}4\pi\nu^2\left(\dfrac{1}{c_1^3}+\dfrac{2}{c_2^3}\right),\ 0\leqslant\nu\leqslant\nu_\mathrm{D}\quad ,\\ 0, \qquad\qquad\qquad\qquad \nu_\mathrm{D}<\nu\quad ,\end{cases}$$

c_1 和 c_2 分别是固体纵波和横波的速度，与之相关的项差一个因子 2，来自横波有两个振动方向. 频率上限 ν_D 称为德拜频率，它保证振动总自由度为 $3N$：

$$3N=\int Vg(\nu)\,\mathrm{d}\nu\quad .$$

把这个 $g(\nu)$代入上面比热的公式(1)，在低温时可近似算出 $C\propto T^3$，此即固体低温比热的德拜 T^3 定律. (1)式并不局限于他们的简单模型，可以用来研究复杂得多的实际固体，成为理论的基本公式和进一步计算的出发点.

与振动能级和频谱等微观性质相比，比热是宏观物理量，可以直接通过测量来获得. 于是可以问：如何从比热的测量结果来获取关于固体能级和频谱的信息？也就是问：如何利用(1)式从 C 来求 $g(\nu)$？这就是固体比热的反问题. 这里(1)式只包含晶格振动对比热的贡献，不涉及自由电子热运动，准确点说是声子比热的反问题.

求解声子比热的反问题，从比热的测量结果提取出振动频谱，就可以用来分析固体的晶格结构等微观物理机制. 所以这个反问题有很重要的实际意义，长期以来受到许多物理学家的关注. 爱因斯坦和德拜根据简单的模型建立了(1)式，现在则要来求这个方程的普遍解. 显然，这个反问题的普遍解，应把爱因斯坦和德拜的模型作为两个特例包含在内.

就(1)式本身来看，它既可当作从 $g(\nu)$求 C 的积分表达式，也可当作从 C 求 $g(\nu)$的积分方程. 这两个问题在数学上是互为正反的. 所以，前面说的物理上的反问题，现在具体表述成了数学上的反问题. 求解这种反问题，需要的是数学上的直觉，是数学的技巧与算法.

把(1)式当作从 C 求 $g(\nu)$的积分方程，美国蒙特罗尔（E. Montroll）1942 年求得了它的积分解[3]. C 是温度 T 的函数，按照通常的做法，引进与 T 成反比的冷度

$$\theta=\frac{h}{kT}\quad , \tag{2}$$

再作别的变量变换，并且为了能对(1)式作傅里叶变换而延拓到复数域，经过级数展开和傅里叶变换，可以得到

$$g(\nu)=\frac{1}{2\pi V}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{\zeta(2+\mathrm{i}u)\Gamma(3+\mathrm{i}u)}\int_0^{\infty}C(\theta)(\nu\,\theta)^{\mathrm{i}u}\,\mathrm{d}\theta\quad ,$$

其中 $\zeta(s)$和 $\Gamma(s)$分别是黎曼（Riemann）ζ 函数和 Γ 函数(见文献[4]，110 页和 90 页). 后来英国的钱伯斯（Chambers）独立地重复了这个解，苏联的里弗希兹（I. M. Lifshitz）也得到了几乎相同的结果[5]. 这个公式优美简洁，却并不实用. 它是含复变量的二重积分，在分母还出现两个特殊函数，很不容易算.

1959 年，外斯（Weiss）在低温下得到一个近似解[6]. 他先论述在低温时比热 $C(T)$可以展开成级数：

$$C(T)=a_3T^3+a_5T^5+a_7T^7+\cdots,\ T\to 0,$$

然后证明 $g(\nu)$可以用其中的展开系数 $a_3, a_5, a_7,\cdots$ 表达为

$$g(\nu)=\frac{2}{Vk\nu}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{a_{2m-1}}{(2\pi)^{2m}B_m}\left(\frac{h\nu}{k}\right)^{2m-1}\quad ,$$

其中

$$B_1=\frac{1}{6},\ B_2=\frac{1}{30},\ B_3=\frac{1}{42}\quad ,$$

$$B_4=\frac{1}{30},\ B_5=\frac{5}{66}\quad ,\cdots$$

是伯努利（Bernoulli）数(见文献[4]，3 页)，注意这里没有用到 B_1. 若只有含 a_3 的一项，这就是德拜 T^3 定律. 外斯的这个公式倒是实用的，可惜只对低温成立.

(1)式的上述两个解，都是用数学分析，这是物理学家熟悉和惯用的传统解法. 陈难先不同[7]，他没有用这类“流行和时尚的”数学，而用了不要说物理学家绝对不会想到，就是数学家也很难想到的数学——数论，这个被公认为是最优美但最没有用的数学. 一位特立独行不从众的另类物理学家，不按常规出手，使出的招数像变魔术一样神奇，所以玛多仕在美国《物理评论快报》上看到陈难先的论文后，立即就在自己主编的《自然》上发表了整版的评论.

其实事后来看，上述两个解已经露出了可以与数论扯上关系的蛛丝马迹. 黎曼 ζ 函数的定义为

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\quad ,$$

Γ 函数当自变量为正整数时是

$$\Gamma(n+1)=n!\ =n(n-1)\cdots 2\cdot 1\quad,$$

它们和外斯解中对 m 的求和以及伯努利数 B_m 都与整数有关，这正是数论研究的对象.

实际上，用冷度 $\theta=h/kT$ 把(1)式改写成

$$C(h/k\theta)=k\int_0^{\infty}Vg(\nu)\mathrm{d}\nu\,\frac{(\theta\nu)^2\mathrm{e}^{\theta\nu}}{(\mathrm{e}^{\theta\nu}-1)^2}\quad,$$

再展开成泰勒级数，就是

$$C(h/k\theta)=Vk\theta^2\sum_{n=1}^{\infty}n\int_0^{\infty}\mathrm{d}\nu\,\nu^2 g(\nu)\mathrm{e}^{-n\theta\nu}$$

$$=Vk\theta\sum_{n=1}^{\infty}(n\theta)\mathcal{L}[\nu^2 g(\nu);\nu\rightarrow n\theta]\quad,\qquad(3)$$

其中

$$\mathcal{L}[\nu^2 g(\nu);\nu\rightarrow n\theta]=\int_0^{\infty}\mathrm{d}\nu\cdot\nu^2 g(\nu)\cdot e^{-n\theta\nu}$$

是函数 $\nu^2 g(\nu)$ 的拉普拉斯（Laplace）变换，自变量从 ν 变成 $n\theta$. 注意 n 是整数，奥妙就在这里！自变量含整数因子，数论就可由此切入了. 当然，这需要数学的直觉.

大家都知道，拓扑学上有一个怪怪的扭结，即莫比乌斯（Möbius）环，它使人沿着阳光大道竟然不知不觉就走到了阴间. 可是恐怕很少有人知道，在被誉为数学之王的数论里还有一个莫比乌斯反演定理，可以用来求解数学上的反问题. 陈难先用的就是这个定理(见文献[8]，219 页或文献[9]，114 页).

莫比乌斯反演定理说[8,9]，对于 $x>0$，如果

$$E(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\Phi(nx)\quad,$$

则有

$$\Phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)E(nx)\quad,$$

其中 $\mu(n)$ 是莫比乌斯函数，

$$\mu(n)=\begin{cases}1, & n=1,\\(-1)^s, & n=p_1p_2\cdots p_s,\\0, & \text{其他},\end{cases}$$

$p_1,p_2,\cdots$ 是不同的素数. 前 10 个素数是 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29. 自变量为整数的函数称为数论函数. 这里的 $\mu(n)$ 就是一个数论函数，它的前 10 个值见表 1.

表 1

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
μ(n)	1	−1	−1	0	−1	1	−1	0	0	1

记住 $\mathcal{L}[\nu^2 g(\nu);\nu\rightarrow n\theta]$ 是 $n\theta$ 的函数，对(3)式运用莫比乌斯反演定理，有

$$\theta\mathcal{L}[\nu^2 g(\nu);\nu\rightarrow\theta]=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)\,\frac{C(h/kn\theta)}{Vkn\theta}\quad.$$

把左边的因子 θ 除到右边，再作拉普拉斯反演，就可解出

$$g(\nu)=\frac{1}{Vk\nu^2}\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C(h/nk\theta)}{n\theta^2};\theta\rightarrow\nu\right]\quad,\qquad(4)$$

这就是文献上说的陈氏公式，其中 $\mathcal{L}^{-1}[f(\theta);\theta\rightarrow\nu]$ 表示函数 $f(\theta)$ 的拉普拉斯反演，自变量从 θ 变到 ν. 这么两步就解出来，比蒙特罗尔和外斯都简洁多了，用的却是人们意想不到的数论. 这真是神来之笔，带着数论的典雅与优美. 所以玛多仕说像魔术师从礼帽里拎出了兔子.

这个公式只涉及实数域的运算，拉普拉斯反演有系统的规则和算法(见文献[9]，121 页)，显然比蒙特罗尔公式实用. 它是一个普遍解，在低温时可以推出外斯公式并包括了德拜解，在高温时可以得到一个新的公式并包括了爱因斯坦解[10]. 这样，陈难先的工作就为这个声子比热的反问题划上了圆满的句号.

再来看黑体辐射的反问题. 利用黑体辐射谱 $u(\nu,T)$ 的普朗克公式：

$$u(\nu,T)=\frac{8\pi\nu^2}{c^3}\,\frac{h\nu}{\mathrm{e}^{h\nu/kT}-1}\quad,\qquad(5)$$

可以算出从黑体单位表面发出的辐射通量谱，即其辐射本领或辐射功率谱(见文献[2]，209 页)：

$$w(\nu,T)=\frac{c}{4}u(\nu,T)=\frac{2\pi\nu^2}{c^2}\,\frac{h\nu}{\mathrm{e}^{h\nu/kT}-1}\quad.$$

于是，若黑体表面的温度分布为 $a(T)$，则其总的辐射功率谱就是

$$W(\nu)=\int_0^{\infty}a(T)\mathrm{d}T\cdot w(\nu,T)=\frac{2\pi h\nu^3}{c^2}\int_0^{\infty}\frac{a(T)\mathrm{d}T}{\mathrm{e}^{h\nu/kT}-1}\quad.$$

博加尔斯基（N. N. Bojarski）1982 年提出的问题是[11]：如何从测量得到的总辐射功率谱来提取辐射体表面的温度分布，亦即如何从 $W(\nu)$ 算出 $a(T)$？这就是黑体辐射的反问题，它在数学上则是求上述积分方程的解.

用（2）式定义的冷度 θ 作自变量，$\mathrm{d}T=-h\mathrm{d}\theta/k\theta^2$，并作级数展开，上述方程就成为

$$W(\nu)=\frac{2\pi h^2\nu^3}{kc^2}\int_0^{\infty}\frac{a(h/k\theta)\mathrm{d}\theta}{\theta^2(\mathrm{e}^{\theta\nu}-1)}$$

$$=\frac{2\pi h^2\nu^3}{kc^2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-n\theta\nu}\,\frac{a(h/k\theta)}{\theta^2}\mathrm{d}\theta\quad.$$

博加尔斯基用迭代法求解，引进新的变量，弄得很

复杂[12]．于是金（Y. Kim）和嘉伽（D. L. Jaggard）又进行改进，得到一个级数，但没有给出一般表达式[13]．

陈难先的解法很简单．上式可以写成

$$W(\nu)=\frac{2\pi h^2\nu^3}{kc^2}\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{L}\left[\theta^{-2}a(h/k\theta);\theta\to n\nu\right]\quad .$$

把右边求和号前的因子除到左边，用莫比乌斯反演定理，有

$$\mathcal{L}\left[\theta^{-2}a(h/k\theta);\theta\to\nu\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)\frac{kc^2}{2\pi h^2}\frac{W(n\nu)}{(n\nu)^3}\quad .$$

再求拉普拉斯反演，把自变量从 ν 变回 θ，就得到

$$a(T)=\frac{c^2}{2\pi kT^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{W(n\nu)}{\nu^3};\nu\to\theta\right]_{\theta=h/kT}\quad , \tag{6}$$

优雅的魔术师又拎出了一只小兔子！上式在文献上被称为陈氏定理．

遥感卫星可以探测到地面热辐射的频谱分布，从中提取出地表的温度分布，就能够获得有关地面的各种实际信息．同样，对导弹发射和核爆炸试验这类敏感事件的监测，也要用到遥感技术．所以，这个黑体辐射的反问题在 *IEEE*（电气和电子工程师学会会刊）上热烈地讨论了将近 9 年．除了博加尔斯基迭代解和金与嘉伽的改进，还提出了另外一些重要的简化与近似[14,15]．陈难先的工作则圆满地结束了这一讨论．现在，陈氏定理已经被进一步用到了星际尘埃中的温度分布、黑洞外壳的温度分布以及活动银河系中的吸积盘等天体物理问题[16]．

玛多仕的评论，着眼于数学在物理学中的应用．他开篇的第一段话是：

“认为纯数学只是碰巧才有用，这是广为流传的观念．连数学家自己也不例外．但科学的实际发展为什么愈来愈数学化了呢？有两种解释．第一种说是碰运气，数学家做了这么多的事，总有一些是有用的．第二种说是心理上的，最纯粹的数学家在无意识中也会对现实世界的紧迫问题有感觉，从而影响他们的兴趣．”

数学家是理想和唯美的，物理学家现实得多．他们是遇到了困难和问题而去找数学．物理学的发展史，也是物理学家发现和找到数学的历史．牛顿为了天体力学的计算，找到了微积分．爱因斯坦为他的相对论找到了四维时空和黎曼几何，量子力学的创立在物理学中引进了希尔伯特（Hilbert）空间，晶体学的研究要用点群，光谱研究要用转动群，粒子物理用到李群和李代数，量子场论用到泛函分析和格拉斯曼（Grassmann）代数，杨振宁和米尔斯（Mills）的规范场联系到微分几何与纤维丛，现在陈难先又为求解上述反问题找到了数论．

物理学家的感受也不同．他们一直把整数用作上标或下标，现在突然意识到这些上标或下标是数论函数的自变量，自己一直在与数论函数打交道．物理学家真的好辛苦，刚刚才学了群论和微分几何，现在又要学数论了！这个局面，就是希尔伯特这样的大数学家也没有想到．上世纪初，柯朗（R. Courant）与希尔伯特写他们的传世名著《数学物理方法》时，想到的主要还只是微分方程与特殊函数．现在《数论物理》这本书已经翻开，看来数学物理方法也该改写了．

许多人抱怨物理学家，说他们故弄玄虚，把一个好端端的直观形象的物理弄得越来越抽象，越来越数学化．其实物理学家也很无奈，他们是身不由己地跟着发展走．连数论都能帮物理解决问题，物理学家在惊喜之余，再一次对造化产生了由衷的敬畏．数学是物理的语言和工具，既然选择做物理，就不能怕跟数学打交道．正如玛多仕所说，科学的发展实际上就是愈来愈数学化了．

西方文化的传统，是把数学（mathematics）和科学（science）明明白白地区分开来的．中文把science翻译成“科学”，就会转义被异化成“各个科目的学问”．数学当然也是各种学问中的一个“科目”，所以在中国许多人也就把数学当作“科学”之一员了．高斯（C. F. Gauss）倒是持这种观点的，大家都知道他的名言：“数学是科学之后，而数论则是数学之后”（Mathematics is the queen of sciences——and number theory is the queen of mathematics），既然是科学的皇后中的皇后，数论会在物理学中大显身手，这是迟早的事．事实上，早在 100 多年前，在 1905 年哥廷根数学学会纪念狄里希利（P. G. Lejeune Dirichlet）百年诞辰的聚会上，闵可夫斯基（H. Minkowski）在演讲中就预言，数论很快就会在物理学和化学中奏响凯歌（见文献[8]，Foreword）．

事情真的被闵可夫斯基言中．100 多年来，数论已经陆续进入一些物理领域．音乐厅顶篷如何设计才能尽量改善音响效果，用到了素数元根的傅里叶性质，这是在上一世纪 70 年代．在 X 射线天文学观测中，为了从观测数据分析出 X 射线源的图像，遮光板的设计用到了伽洛瓦（E. Galois）序列，这是在上一世纪 80 年代．1984 年末，舍彻曼

(D. Shechtman)等人在结晶学上的轰动发现，即在急冷凝固的 Al_3-Mn 合金中观察到 5 次对称的准晶，则呈现了数论中著名的黄金分割. 实际上，对于物质的这一新形态，从斐波那契数(Fibonacci numbers)导出的非周期性自相似序列是一个很好的模型. 还可以举出一些例子[8].

当然，最著名的是对于广义相对论第四效应的验证，即对雷达回波延迟的测量. 当地球与水星位于太阳两侧时，从地球射向水星和从水星反射回地球的雷达波都从太阳表面经过，轨道在太阳附近发生弯曲，接收到反射波的时间比不经过太阳附近时的会有延迟. 这个实验的困难在于，当行星进入太阳背后时，回波能量只有入射波的 10^{-27}，这点能量甚至不够使一个电子的电位增加千分之一伏特. 这么微小的能量竟然也能观测到，主要是由于根据伽洛瓦域(Galois fields)恰当地选择了雷达脉冲的发射序列(见文献[8],275 页). 在 1968 至 1971 年期间，沙皮罗(I. I. Shapiro)等人对金星和水星进行了持续几年的观测(见文献[2],390—392 页).

数论在物理学中的影响和运用在早期如果还只能说是个别和零散的，那么到了上一世纪 80 年代末 90 年代初，则可以说已经开始逐渐形成气候. 1989 年早春，在法国举办了以《数论与物理学》为主题的勒豪舍冬季讲习班(Les Houches Winter School)[17]. 1990 年，除了陈难先的工作，在年末又有两个运用莫比乌斯反演定理的工作发表[18,19]. 紧接着在 1991 年，美国数学学会召开了题为《数论的过度有效性》的会议[20]. 这里特别是陈难先的工作，带动了随后关于费米体系逆问题和晶格体系逆问题等的一系列相关研究的开展.

中国人对数论情有独钟. 中文“数学”直译成英文是 number science，也就是“数论”. 由于华罗庚的努力推广和传播，使得在“文革”那个文化成为荒漠的年代，运用黄金分割的 0.618 这个神奇的数字得以广为人知. 用这个方法来提高试验和研究的效率，这就不仅是闵可夫斯基所期待的在化学特别是在新药试制中，而且也在生物学和工农业生产中让数论大显身手. 陈景润对哥德巴赫猜想(Goldbach′s conjecture)的执著探索，激起了许多人对这一古老命题经久不衰的热情. 在这种广泛的社会和历史背景下，陈难先在物理学的研究中找到和运用数论，也就有了一定的必然性.

莫比乌斯反演定理适用于物理学中的一系列反问题，所以陈难先的工作不仅仅是为一些重要的物理热点难题找到了巧妙绝伦的解析解，更重要的是在物理学的研究中开辟了一个运用数论的新领域. 近 20 年来,这一领域迅速发展，他总结这些发展的专著也已于最近问世[21]. 在物理学越来越数学化的过程中，陈难先是正在发展的《数论物理》领域中的一位开拓者. 不同于物理学研究中各种各样形形色色昙花一现的唯象模型，他在物理学上刻下的这道印痕是永久的. 这个工作可以拿到大学的物理课程中来讲授，并写入有关的教科书(例如文献[2]，214－216 页和 276 页，文献[9]，115 页，等). 中国人陆续做出了这个水准和层次的工作，这也反映出一百年来中国物理学的进步.

在这个意义上，玛多仕是有眼光和远见的. 他用《自然》杂志一整版的篇幅来进行评论，一点也不过分. 他不只是在称赞. 在具体介绍和分析之后，他指出了进一步工作的方向和问题. “更苛刻的问题在于，是否有可能把做法推广到不仅只是简单的一维问题. 事情从表面上看，这似乎只不过是个形式，但稍稍一想就会发现，问题在实质上紧紧联系于近一维空间的多连通性. 不过不要泄气，这其实是个挑战.” 这就不仅是评论，更是热情的启发、指点和鼓励. 显而易见，他的评论扶持和引导了陈难先等人的研究活动，推动和促成了这一领域的发展. 谁说只有文学艺术领域需要有高手的评论呢? 在科学特别是物理学领域，高瞻远瞩的指点和评说，同样也是引领时尚和潮流推动研究和创新的重要力量. 德拜在 seminar 上对德布罗意(L. de Broglie) 工作的一个评论，引出了薛定谔(E. Schrödinger)创立波动力学的历史性工作(见文献[2],121 页). 玛多仕对陈难先一个可以说是偶然和孤立性工作的评论，则引出了随后一系列系统的工作. 陈难先新近出版的书[21],可以认为是对玛多仕二十年前的评论与“挑战”的回应和印证. 玛多仕虽然离开我们已经一年多了[22]，但他对陈难先的工作的指点和评说，将会启发我们认识到对科学工作开展评论的重要，进而吸引一批有眼力有远见的中国物理学家投身到科学评论中来.

最后值得一提的是，玛多仕在他的评论中还提到，哈密顿四元数(Hamilton′s quaternion)与相对论量子力学的旋量代数有着有趣的联系. 我最近在刚去世不久的北京大学许方官教授的遗著《四元数物理学》中看到,这份手稿的第 5 章相对论性量子力学对这个问题有一百多页的长篇论述. 看来中国人的数学情结不仅局限于数论. 玛多仕如果还健在和

看到这份手稿，一定又会写出热情洋溢的评论.

参考文献

[1] Maddox J. Nature，1990，344：377

[2] 王正行，《近代物理学》第二版，北京：北京大学出版社，2010 [Wang Z X. Modern physics (2nd edition). Beijing：Peking University Press，2010(in Chinese)]

[3] Montroll E W. J. Chem. Phys.，1942，10：218

[4] 王竹溪，郭敦仁. 特殊函数概论. 北京：北京大学出版社，2000 [Wang Z X，Guo D R. Special Funcations. Beijing：Peking University Press，2000 (in Chinese)]

[5] Lifshitz I M. Zh. Eksp. Theor. Fiz.，1954，26：551

[6] Weiss G. Prog. Theor. Phys.，1959，22：526

[7] Chen N X. Phys. Rev. Lett.，1990，64：1193

[8] Schroeder M R. Number theory in science and communication (third edition). Springer，1999

[9] 吴崇试. 数学物理方法(第二版). 北京：北京大学出版社，2003 [Wu C S. Methods of Mathematical Physics(2nd edition). Beijing：Peking University Press，2003 (in Chinese)]

[10] Resnick R. Halliday D. Basic Concepts in Relativity and Early Quantum Theory (second edition). New York：Wiley and Sons，1985

[11] Bojarski N N. IEEE Trans. Antennas Propagat.，1982，AP-30：778

[12] Bojarski N N. IEEE Trans. Antennas Propagat.，1984，AP-32：415

[13] Kim Y，Jaggard D L. IEEE Trans.，1985，AP-33：797

[14] Lakhtakia N，Lakhtakia A. IEEE Trans.，1984，AP-32：872

[15] Hunter J D. IEEE Trans.，1986，AP-34：261

[16] Li D. Goldsmith P E，Xie T L. Astrophys. J.，1999，522：897

[17] Luck J M，Moussa P，Waldschmidt M (ed.). Number theory and physics. Springer-Verlag，1990

[18] Spector D. Commun. Math. Phys.，1990，127：239

[19] Morita T. J. Stat. Phys.，1990，59：819

[20] Burr S A (ed.). The unreasonable effectiveness of number theory. Am. Math. Soc.，1992

[21] Chen N X. Möbius Inverson in physics，world Scientific，2010

[22] 见 2009 年 4 月 14 日 Timesonline News；或 2009 年 4 月 17 日 Nature 专辑