

磁性拓扑绝缘体中的量子化反常霍尔效应^{*}

——无需外磁场的量子化霍尔效应

余睿 张薇 翁红明 戴希[†] 方忠^{††}

(中国科学院物理研究所 北京 100190)

摘要 文章从平常霍尔效应出发,介绍了反常霍尔效应及其内秉物理机制,并在此基础上介绍了其量子化版本——量子化反常霍尔效应.然后从拓扑有序态的角度,重点讨论了量子化反常霍尔效应与量子霍尔效应、量子自旋霍尔效应、拓扑绝缘体等之间的区别与内在联系.最后介绍了通过在拓扑绝缘体(Bi_2Se_3 , Bi_2Te_3 和 Sb_2Te_3)薄膜中掺杂过渡金属元素(Cr 或 Fe)实现量子化反常霍尔效应的方法.

关键词 反常霍尔效应(AHE),量子化反常霍尔效应(QAHE),拓扑绝缘体(TI),磁性绝缘体

Quantized anomalous Hall effect in magnetic topological insulators

YU Rui ZHANG Wei WENG Hong-Ming DAI Xi[†] FANG Zhong^{††}

(*Institute of Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China*)

Abstract We introduce the anomalous Hall effect and its intrinsic mechanism, and then discuss the quantized anomalous Hall effect (QAHE). From the viewpoint of topological order, we focus on the differences and relationships among the quantum Hall effect, quantum spin Hall effect, QAHE, and topological insulators. Finally, we discuss the proposal that QAHE can be realized in thin films made of magnetic topological insulators such as Bi_2Se_3 , Bi_2Te_3 and Sb_2Te_3 doped with Cr or Fe.

Keywords anomalous Hall effect, quantized anomalous Hall effect, topological insulator, magnetic insulator

1 背景简介

1.1 霍尔效应与反常霍尔效应

霍尔效应是凝聚态物理中非常重要的实验现象之一.1880年,Edwin Hall观测到在一个二维简单金属中通过纵向的电流,并在垂直于金属平面的方向上加一个外加磁场后,会在金属平面的横向方向上观测到电压,这个现象称之为霍尔效应^[1].霍尔效应的产生是由于在磁场中运动的电子会感受到洛伦兹力的影响,这使得电子运动的轨迹发生横向的偏转(正负电荷的偏转方向正好相反),从而在样品的横向边界产生电荷积累,导致霍尔电压的出现.由于

霍尔电导的大小直接与样品中的载流子浓度相关,故在凝聚态物理领域获得了广泛的应用,成为金属和半导体物理中一个重要的研究手段.

在发现霍尔效应后(1881年),Edwin Hall又在一个具有铁磁性的二维金属中发现,即使是在没有外加磁场的情况下(或弱外场),也可以观测到霍尔效应(见图1)^[1].这里的关键是样品要具有长程的铁磁序,这样外加磁场就不是必需的了.这种铁磁

^{*} 国家自然科学基金(批准号:131212503413;10821403)、国家重点基础研究发展计划(批准号:2007CB925000)资助项目
2010-08-09收到

[†] 通讯联系人. Email: daix@aphy. iphy. ac. cn

^{††} 通讯联系人. Email: zfang@aphy. iphy. ac. cn

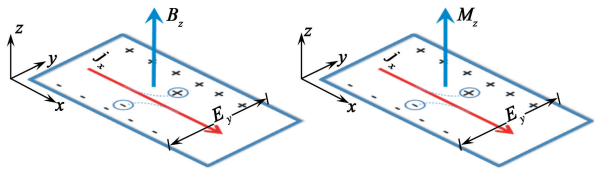


图1 霍尔效应(左)与反常霍尔效应(右)的示意图

性材料中的霍尔效应后来被称之为反常霍尔效应,而把前面介绍的非磁性材料中的霍尔效应称为平常霍尔效应.虽然反常霍尔效应与平常霍尔效应看起来非常相似,但是其物理本质却有着非常大的差别,这主要是在没有外磁场的情况下不存在外场对电子的轨道效应.也正因为这样的差别导致了对反常霍尔效应机理的理解经历了100多年的漫长历史,直到最近才有了突破性的进展.从上个世纪50年代开始对反常霍尔效应的物理本质有了较系统的研究,但是占主导地位的观点认为,反常霍尔效应的出现主要是由于材料中的杂质散射导致,因而是一种外乘效应^[2].虽然Karplus与Luttinger等人也提出了由于自旋-轨道耦合而导致的内乘机制^[3],但是不被主流观点所支持.外乘与内乘机制间的争论一直持续了近50年,这主要是在当时的理解基础上,不管是哪一种理论机制都无法与实验进行定量的比较.2000年左右开始对反常霍尔效应的机理研究有了突破性的进展,国际上多个研究小组对其进行了系统研究,认识到反常霍尔效应的出现直接与材料中的自旋-轨道耦合及电子结构的Berry相位^[4]有关.在具有自旋-轨道耦合并破坏时间反演对称性的情况下,材料的特殊电子结构会导致动量空间中非零Berry相位的出现,而该Berry相位的存在将会修改电子的运动方程,从而导致反常霍尔效应的出现,因而应该是一种内乘机制^[3,5,6].更为重要的是,对于这种认识的提高使得我们有可能通过详细的计算与实验结果进行定量的比较.通过对SrRuO₃系统^[7]及金属Fe^[8]中的反常霍尔效应进行的定量的第一性原理计算研究,都证实了这种内乘机制的主导作用.随后越来越多的实验与理论研究都证实了这种基于Berry相位的内乘机制的正确性.而这种内乘机制对于我们这里要讨论的量子化反常霍尔效应至关重要.

1.2 量子霍尔效应与拓扑有序态

霍尔效应的量子化版本——量子霍尔效应^[9],是凝聚态物理发展历史中里程碑式的重要量子现象.在前面讨论的平常霍尔效应的基础上,如果外加磁场足够强,温度足够低,材料体内的所有电子都被

局域化到了分立的朗道能级上,形成一个完全绝缘的体态.然而这时,材料的边界仍然是可以导电的,形成一些没有“背散射”的导电通道(也就是不受杂质散射影响的理想导体),从而导致量子霍尔效应的出现.在不考虑电子关联与考虑电子关联的体系中,分别可以观测到整数与分数量子霍尔效应.整数与分数量子霍尔效应分别于1985年和1998年两度获得诺贝尔物理学奖.量子霍尔效应之所以重要,在于对其机理的理解极大地提升了人们对凝聚态物质中量子现象的认识,它是一种全新的量子物态——拓扑有序态.根据朗道的对称性理论,凝聚态物质中的各种有序态的出现一般都伴随着某种对称性的破缺,同时伴随有局域序参量及其长程关联的出现.而在量子霍尔效应中不存在局域的序参量,对该物态的描述需要引入拓扑不变量的概念^[10,11].由不同的拓扑不变量描述的系统具有不同的拓扑有序态.对于整数量子霍尔效应而言,该拓扑不变量就是整数的Chern-number.

1.3 量子自旋霍尔效应与拓扑绝缘体

从2005年开始,人们逐步认识到除了量子霍尔效应以外,还存在着多种具有不同拓扑性质的量子态.重要的是这些不同的拓扑量子态都可以在凝聚态物质中通过材料设计而实现,这使得广泛的实验研究成为可能.最近几年研究得比较多的是具有时间反演对称性的拓扑绝缘体,它可以通过 Z_2 不变量来刻画^[12].典型的二维的 Z_2 拓扑绝缘体是HgTe/CdTe量子阱,其中最直接的物理现象就是可以观察到量子自旋霍尔效应^[13,14].对于三维的拓扑绝缘体而言,其材料实现并不是那么直接的.2009年,我们通过计算预言了一类三维的强拓扑绝缘体系统(Bi₂Se₃, Bi₂Te₃, Sb₂Te₃)具有约0.3eV的体能隙,可以在室温下保存其拓扑性质^[15].后续的多个实验结果证实了该理论预言的正确性^[16,17].

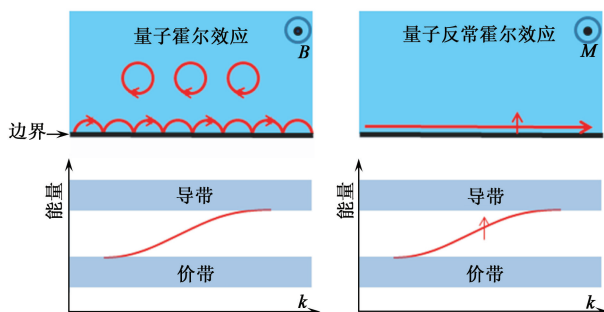


图2 量子霍尔效应(左)与量子化反常霍尔效应(右)的比较示意图

2 关键问题

到目前为止,对拓扑绝缘体的研究获得了长足的进展.多种不同的拓扑绝缘体都纷纷被找到,包括:二维 Z_2 拓扑绝缘体(量子自旋霍尔效应),三维 Z_2 拓扑绝缘体(量子磁电耦合效应),等等.回过头来我们突然发现,一类最基本的破坏了时间反演对称性的二维磁性拓扑绝缘体还没有被找到.前面谈到,在低温强磁场下的二维电子气会进入一种拓扑量子态,在此拓扑量子态中可以观察到量子霍尔效应,然而遗憾的是,这并不是真正的拓扑绝缘“体”,该效应的出现需要借助于外加的强磁场,或者说需要有朗道能级的出现.我们是否能够找到一种真正的二维磁性拓扑绝缘体材料,它本身就具有特殊的拓扑量子态,在不需要外加磁场(也没有朗道能级)的情况下就能够观察到量子霍尔效应(这时应被称为量子反常霍尔效应,见图 2)? 就像是具有时间反演不变的二维 Z_2 拓扑绝缘体,一旦找到其材料,就自然可以观察到量子自旋霍尔效应.这是本研究工作所要瞄准的关键问题.一旦找到这种二维磁性拓扑绝缘体,将直接证明反常霍尔效应也具有量子化版本,并可以在材料中实现量子化反常霍尔效应,这将进一步提高我们对拓扑绝缘体的认识.同时进行这样的探索研究还具有很重要的应用价值.前面谈到,量子霍尔效应中的边缘态可以被看成是一根“理想导线”,不存在由于杂质势而导致的背散射,电阻极低,能耗极小.如果我们能够在现有的电子学技术中利用这种边缘态,将极大地克服 Moore 定律的极限.该边缘态还与量子自旋霍尔效应中的边缘态不同,在量子自旋霍尔效应中利用的是自旋流,而在这里利用的是电荷流,因此更有可能与现有电子学技术兼容.

3 研究进展

量子反常霍尔效应与量子霍尔效应最大的区别就是前者没有外磁场轨道效应导致的朗道能级,因此与量子霍尔效应有着本质的区别.要想获得这种效应最重要的是通过材料设计,找到二维的磁性拓扑绝缘体.我们的出发点是:由于量子反常霍尔效应与量子自旋霍尔效应在某些方面具有很大的相似性,我们把目光锁定在 Bi_2Se_3 , Bi_2Te_3 和 Sb_2Te_3 这一系列材料中(晶体结构和能带色散^[15]见图 3 和图 4).

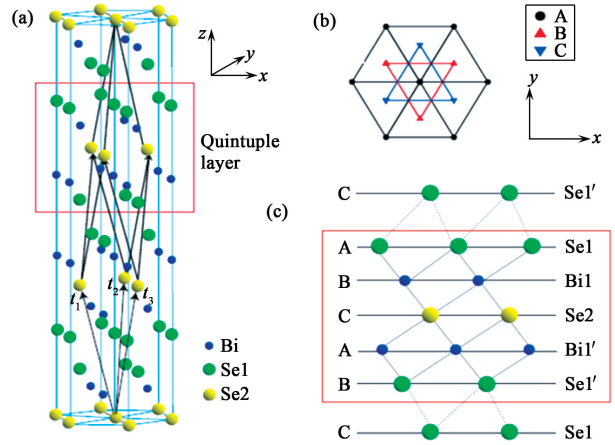


图 3 (a)和(b)分别为 Bi_2Se_3 晶体结构的侧视图和俯视图;(c)图中方框内 5 个原子层构成一个单位层(quintuple layer(后面简记为 QL))

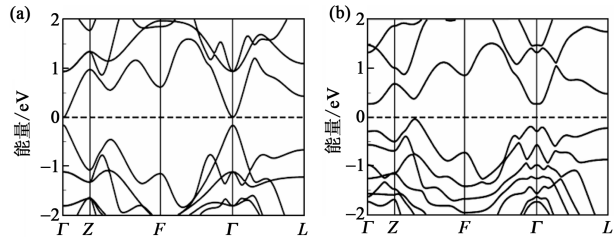


图 4 Bi_2Se_3 能带图 (a)不含自旋轨道耦合;(b)含有自旋轨道耦合.比较两图得知,在考虑自旋轨道后, Γ 点附近的能带出现了反带结构

这类材料在三维情况下是强拓扑绝缘体.目前的 MBE 实验技术可以很好地控制这类材料的二维薄膜的生长^[18,19].理论上已经预言,二维薄膜材料在一定厚度下会出现量子自旋霍尔态^[20].量子自旋霍尔态可以看成是两套量子反常霍尔态的叠加,而且两套互为时间反演.因此,如果通过掺杂磁性杂质破坏量子自旋霍尔体系的时间反演对称性,会使得其中的一套量子反常霍尔态被破坏掉,只剩下另一套,从而使得体系呈现出量子反常霍尔效应的性质(见图 5).

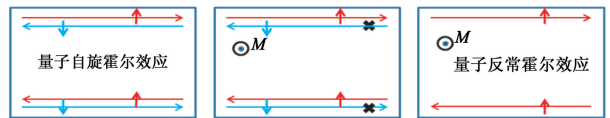


图 5 对量子自旋霍尔体系(左图)引入磁性杂质破坏体系的时间反演对称性,这会破坏两套互为时间反演边界态中的一套(中图),使得体系呈现出量子反常霍尔效应(右图)

按照上面的想法,我们发现,在拓扑绝缘体(Bi_2Se_3 , Bi_2Te_3 和 Sb_2Te_3)的薄膜中,通过掺杂过渡金属元素(Cr 或者 Fe)可以实现量子化的反常霍尔效应.下面将对研究的细节作一些说明.

Bi_2Se_3 体系掺进了磁性杂质后,系统的自由能

可写成：

$$F_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \chi_e^{-1} M_e^2 + \frac{1}{2} \chi_L^{-1} M_L^2 - J_{\text{eff}} M_L M_e \quad ,$$

其中 J_{eff} 是交换关联系数, M_e 是电子磁矩, M_L 是杂质的局域磁矩. 简单的推导可以得到系统有铁磁解的条件是 $J_{\text{eff}}^2 \chi_L^{-1} \chi_e^{-1} > 0$. 因此一个足够大的 χ_e 可以使系统产生自发磁化, 进入铁磁相. 通过第一性原理计算和模型分析, 我们确实发现 Bi_2Se_3 系列材料有很大的 Van-Vleck 顺磁磁化率^[21], 这和普通的半导体有很大的不同. 我们可以通过下面的公式来说明这个问题：

$$\chi_e^z = \sum_{E_{nk} \langle \mu, E_{nk} \rangle \mu} 4 \mu_0 \mu_B^2 \frac{\langle nk | \hat{S}_z | mk \rangle \langle mk | \hat{S}_z | nk \rangle}{E_{mk} - E_{nk}} \quad .$$

一般的半导体价带是 p 轨道成分, 而导带是 s 轨道成分, 在不引入载流子的情况下, 从上面的公式中可以看出 \hat{S}_z 的矩阵元数值非常小, 体系的 Van-Vleck 顺磁性可以忽略不计. Bi_2Se_3 体系的价带和导带主要是 p 轨道成分, 而且体系存在很强的自旋轨道耦合效应, 所以公式中分子上的 \hat{S}_z 的矩阵元都有比较大的数值, 使得 Bi_2Se_3 体系有一个比较大的 Van-Vleck 顺磁磁化率. 图 6(a) 是理论计算的结果. 调节体系的自旋轨道耦合系数使得体系进入反带结构后, Van-Vleck 顺磁磁化率会迅速增大.

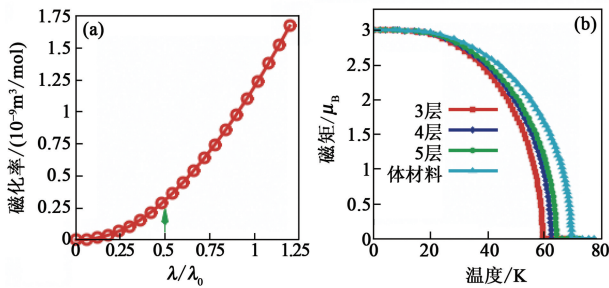


图 6 (a) Van-Vleck 顺磁磁化率随着自旋轨道耦合大小的变化, 箭头标记的是体系刚好出现能带反带时自旋轨道耦合的大小, 反带发生后磁化率随着自旋轨道耦合的变化迅速增大; (b) 3, 4, 5 层 (5 个原子为一层) 薄膜体系和三维体系磁矩和温度的关系, 计算得到居里温度在 70K 左右

按照上面的计算和分析, 我们现在得到的结论是: Bi_2Se_3 系列材料存在一个比较大的 Van-Vleck 顺磁磁化率, 往母体材料中掺杂磁性杂质后, 可以使磁性杂质的磁矩发生自发磁化, 这个自发磁化的有效磁场对实现反常霍尔效应非常重要. 但现在还有一个问题需要先解决掉: 因为我们寻找的是存在量子化反常霍尔效应的体系, 而不是一般的反常霍尔效应, 所以我们需要体系保持在绝缘体的状态, 因此要

求掺杂磁性杂质后体系仍然是绝缘体. 通过第一性原理计算我们得到: 掺杂过渡金属元素 Cr 或者 Fe 后, Bi_2Se_3 体系进入到磁性绝缘体相 (见图 7(c) 和 (d)). 这使得 Bi_2Se_3 体系和一般的稀磁半导体有明显的不同, Bi_2Se_3 体系不需要有载流子, 在绝缘体状态就可以实现铁磁的长程有序性.

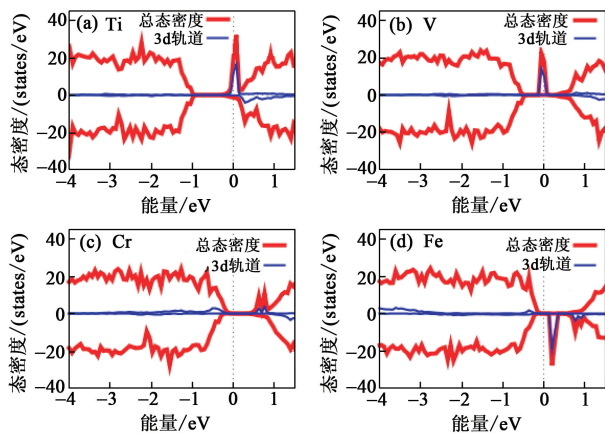


图 7 Bi_2Se_3 中掺杂不同过渡金属时体系在费米面附近的态密度. 掺 Ti 或 V 时体系会变成金属态, 见 (a) 和 (b), 掺杂 Cr 或 Fe 时, 从态密度上可以看到, 体系保持在绝缘态, 见 (c) 和 (d)

下面简单地介绍第一原理计算掺杂体系的过程. 实验研究表明, 磁性杂质 Ti, V, Cr, Fe 主要是取代 Bi_2Se_3 系列材料中的 Bi 位^[22-24], 所以我们集中研究了 $3 \times 3 \times 1$ Bi_2Se_3 超胞中一个 Bi 原子被磁性杂质替代的情况. 计算结果如图 7 所示, 掺杂 Cr, Fe 后, 体系仍然是绝缘体, 而掺杂 Ti, V 后, 体系变成金属. 以上所有掺杂物都是 3+ 价态, 这样的等电子价态替代不会引入自由载流子. 由于 3d 过渡金属离子的洪特 (Hund) 耦合规则, 我们总是获得体系的高自旋态. 在 Fe 掺杂情况下, 具有 5 个电子的 Fe^{3+} 在高自旋态下喜欢 $d^5 \uparrow d^0 \downarrow$ 电子构型, 进而在多子和少子自旋间产生一个能隙. 对于 Cr 情况, 替代 Bi 位的 Cr^{3+} 的局域环境是由 6 个最近邻 Se^{2-} 离子构成的八面体. 此晶体场将 d 轨道分裂成 t_{2g} 和 e_g 简并. 这个分裂大到足以稳定 Cr^{3+} 离子的 $t_{2g}^3 \uparrow e_g^0 \downarrow t_{2g}^0 \downarrow e_g^0 \downarrow$ 构型, 因此在 t_{2g} 和 e_g 简并中形成一个能隙. 而对于 Ti 和 V 掺杂的情况, t_{2g} 简并仍是部分占据的, 所以整个体系呈金属性. 此外, 虽然 DFT 理论中的 LDA 近似可能低估电子关联效应, 但是包括电子-电子相互作用的 U (例如 LDA+U 方法) 将进一步加大能隙 (也可能减少 p-d 杂化和 T_c ^[25]). 由自旋极化获得的能量分别是 0.9eV/Fe, 1.5eV/Cr, 0.7eV/V 和 0.02eV/Ti, 除 Ti 外都是很大的值. 从能带电子 p 轨道的分裂, 我们可以利用 $\Delta E = x J_{\text{eff}} \langle S \rangle$ (x 为掺杂浓度, $\langle S \rangle$ 为局域自旋的平均期望值) 估算出局域磁矩和 p 电

子间的有效交换耦合常数 J_{eff} . Cr 掺杂体系的 J_{eff} 为 2.7eV, Fe 体系为 2.8eV. 然后, 再利用 J_{eff} 值并且应用平均场理论, 我们可以估算出体系的铁磁居里温度, 约为 70K 的量级(见图 6(b)), 这使得实验上观测这一现象成为可能.

下面我们将进一步来说明磁性杂质引入的等效磁场怎样使得 Bi_2Se_3 二维薄膜体系进入到量子反常霍尔相.

首先, Bi_2Se_3 系列材料有一个很吸引人的特征: 在三维体系的表面上会存在一个无质量的 Dirac 色散形式的表面态. 这一点可作如下理解: 材料的表面可以看成是材料和真空的界面, 真空是一个普通的绝缘体, Bi_2Se_3 材料是一个拓扑绝缘体, 而物质拓扑性质的改变需要通过能隙的闭合来实现, 因此 Bi_2Se_3 材料的表面作为非拓扑材料(真空)到拓扑材料(Bi_2Se_3)的过渡界面就一定会存在一个能隙闭合的状态, 这就是上面提到的那个无质量的 Dirac 色散形式的局域在表面上的表面态. 把材料做成二维薄膜后, 上下两个表面上都有这样的表面态. 当薄膜非常薄的时候, 这两个表面上的表面态会相互作用, 从而打开能隙, 这个过程可以由下面的哈密顿量描述: $H_{\text{sf}} =$

$$\begin{bmatrix} 0 & i v_{1f}(k_x - i k_y) & m_k^* & 0 \\ -i v_{1f}(k_x + i k_y) & 0 & 0 & m_k^* \\ m_k & 0 & 0 & -i v_{2f}(k_x - i k_y) \\ 0 & m_k & i v_{2f}(k_x + i k_y) & 0 \end{bmatrix}$$

其中基矢的顺序是: $|t \uparrow\rangle, |t \downarrow\rangle, |b \uparrow\rangle, |b \downarrow\rangle$, t 表示上表面, b 表示下表面; v_{1f}, v_{2f} 分别是上下表面的费米速度, $m_k = m_0 + b k^2$. m_k 描述上下表面之间的相互作用, 这里只保留到二阶项. 当薄膜很厚的时候, 上下表面在空间上相隔很远, 相互作用很弱, $m_k \approx 0$; 随着薄膜厚度减小, 上下表面相互作用增强, m_k 也随之增大.

考虑到磁性杂质引入的有效磁场 M 后(假定沿着 z 方向), 哈密顿量里面会增加一项 Zeeman 项:

$$H_{\text{zeeman}} = \begin{bmatrix} g_t M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g_t M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_b M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g_b M \end{bmatrix}$$

体系满足空间反演对称性的时候, 有 $v_{1f} = v_{2f} = v_f$, $g_b = g_t = g$, $m_k = m_{-k}$.

重新组合基矢, $|+\uparrow\rangle = (|t \uparrow\rangle + |b \uparrow\rangle) / \sqrt{2}$; $|-\downarrow\rangle = (|t \downarrow\rangle - |b \downarrow\rangle) / \sqrt{2}$; $|+\downarrow\rangle = (|t \downarrow\rangle + |b \downarrow\rangle) / \sqrt{2}$; $|-\uparrow\rangle = (|t \uparrow\rangle - |b \uparrow\rangle) / \sqrt{2}$. 在这组新的基矢下, 哈密顿量写成如下形式:

$$H_{\text{sf}} + H_{\text{zeeman}} = \begin{bmatrix} h_k + gM\sigma_z & 0 \\ 0 & h_k^* - gM\sigma_z \end{bmatrix}$$

其中 $h_k = m_k \sigma_z + v_f (k_y \sigma_x - k_x \sigma_y)$.

上式中上对角块和下对角块 Zeeman 项符号相反, 这是体系出现量子反常霍尔相的关键所在. 从下面的示意图中可以很形象地理解这一结果.

从图 8 中可以看出, 不管体系最初是处在正常状态(A)还是能带反带状态(B), 当引入足够大的交换场后, 体系最终只有一套能态处于能带反带状态, 而另一套离发生反带的条件更远(情况 A)或者被解除了反带状态(情况 B). 再考虑到自旋轨道耦合相互作用, 系统会变成绝缘体. 此时, 系统进入了量子化的反常霍尔态.

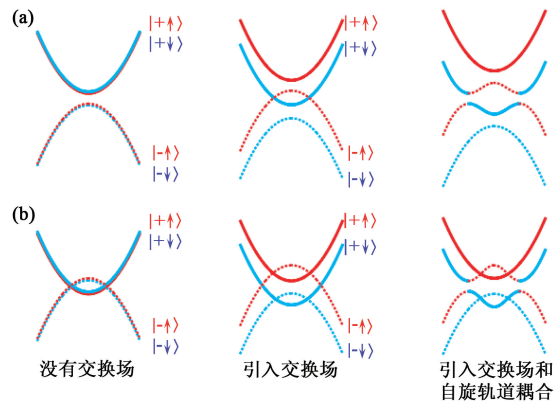


图 8 (a) 体系能带初始状态在正常态, 交换场的和自旋轨道耦合相互作用对能带的影响; (b) 体系能带初始状态为反带, 交换场的和自旋轨道耦合相互作用对能带的影响. 这两种情况的结果都一样: 体系最终存在一套发生反带的能带, 使体系进入量子化的反常霍尔效应

下面通过第一性原理方法计算了 3 层、4 层、5 层(5 个原子为一层)薄膜费米面附近 Γ 点能级随交换场的变化, 从图 9(d) 图中可以看到, 交换场超过临界值后, 系统都有一个量子化的霍尔电导. 计算结果和上面的分析结论一致.

在真实体系中, 由于杂质和缺陷的影响, 系统的费米面不会正好处在能隙中, 因此我们给出霍尔电导随着费米能量变化的曲线(见图 10), 期待对实验有一定的指导.

4 总结

在拓扑绝缘体材料(Bi_2Se_3 , Bi_2Te_3 和 Sb_2Te_3)的薄膜中, 通过掺杂过渡金属元素(Cr 或者 Fe), 可以实现量子化的反常霍尔效应. 这里最关键的问题是通过磁性掺杂, 借助 Van-Vleck 顺磁性, 可以实现

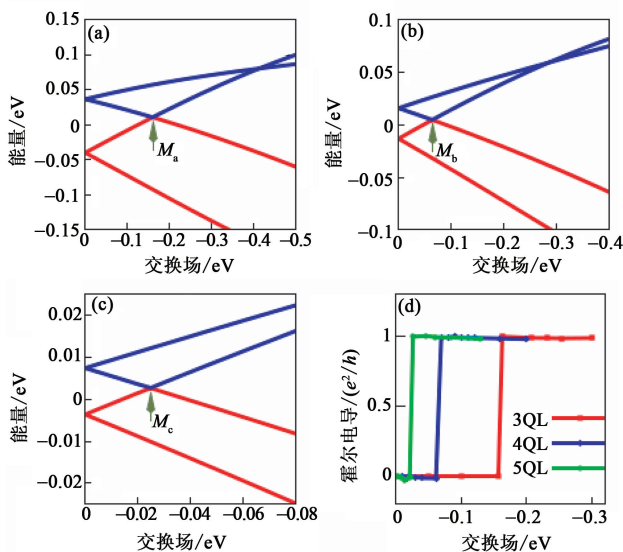


图9 (a),(b),(c)分别是3,4,5层(5个原子为一层)Bi₂Se₃薄膜费米面附近Γ点能级随着交换场变化的图形,图中黑色箭头标记的是能带发生闭合时的临界交换场,继续增大交换场,体系进入到量子化的反常霍尔相,从(d)中可以清楚地看出量子化的霍尔平台

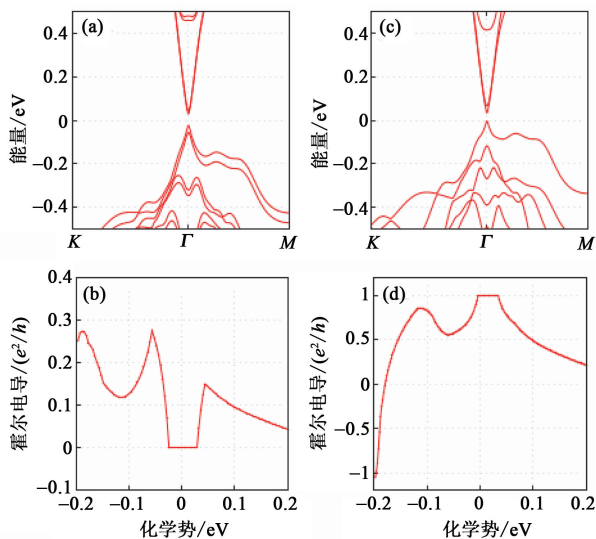


图10 3层Bi₂Se₃薄膜在交换场为(a) -0.05eV, (c) -0.24eV时的能带图和对应的霍尔电导随着费米能量变化的图形.(a)图中交换场低于临界交换场,因此(b)中当费米能量落在能隙中时,霍尔电导为0, (c)图中交换场超过了临界交换场,因此(d)中当费米能量落在能隙中时霍尔电导为1个量子单位

磁性的拓扑绝缘体,磁性居里温度可以达到70K的量级.通过第一性原理计算和理论分析,发现这一磁性原子掺杂体系与一般的稀磁半导体有明显的不同,即这里不需要有载流子,体系仍然保持着绝缘体的状态,就可以实现铁磁的长程有序态;而且由于薄膜中掺杂原子的自旋极化与强烈的自旋轨

道耦合,在这一体系中无需外加磁场,也无需相应的朗道能级,在适当的杂质掺杂浓度和温度下,就可以存在量子化的反常霍尔效应^[26].这一发现为低能量耗散的新型电子器件设计指出了一个新的发展方向.

参考文献

[1] Hall E H. Philos. Mag., 1880,10:301; Hall E H. Philos. Mag., 1881,12:157
 [2] Smit J. Physica, 1955,21:877; Berger L. Phys. Rev. B, 1970, 2:4559
 [3] Karplus R, Luttinger J M. Phys. Rev., 1954,95:1154
 [4] Berry M V. Proc. Roy. Soc. of London, 1984, 392: 45
 [5] Nagaosa N, Sinova J, Onoda S *et al.* Rev. Mod. Phys., 2010,82:1539
 [6] Jungwirth T, Niu Q, MacDonald A H. Phys. Rev. Lett., 2002,88:207208
 [7] Fang Z, Nagaosa N, Tahakashi K S *et al.* Science, 2003, 302:92
 [8] Yao Y, Kleinman L, MacDonald A H *et al.* Phys. Rev. Lett., 2004,92:037204
 [9] von Klitzing K, Dorda G, Pepper M. Phys. Rev. Lett., 1980,45:494
 [10] Laughlin R B. Phys. Rev. B, 1982,23:5632
 [11] Thouless D J, Kohmoto M, Nightingale P *et al.* Phys. Rev. Lett., 1982,49:405
 [12] Kane C L, Mele E J. Phys. Rev. Lett., 2005,95:146802
 [13] Bernevig B A, Hughes T L, Zhang S C. Science, 2006,314: 1757
 [14] König M *et al.* Science, 2007,318:766
 [15] Zhang H J, Liu C X, Qi X L *et al.* Nat. Phys., 2009,5:438
 [16] Xia Y *et al.* Nat. Phys., 2009,5:398
 [17] Chen Y L *et al.* Science, 2009,325:178
 [18] He K, Xue Q K *et al.* Nat. Phys., 2010,6:584; Zhang G H *et al.* Appl. Phys. Lett., 2009, 95:053114
 [19] Zhang T *et al.* Phys. Rev. Lett., 2009,103:266803
 [20] Liu C X *et al.* Phys. Rev. B, 2010,81:041307
 [21] Van Vleck J H. The Theory of Electronic and Magnetic Susceptibilities. London :Oxford Univ. Press, 1932
 [22] Kulbachinskii V *et al.* JETP Lett., 2001,73:352
 [23] Dyck J S, Hájek P, Lošt'ák P *et al.* Phys. Rev. B, 2002, 65:115212
 [24] Chien Y J. Thesis. University of Michigan, Ann Arbor, MI, 2007
 [25] Sato K, Dederichs P H, Katayama-Yoshida H *et al.* Physica B, 2003,863:340
 [26] Yu R *et al.* Science, 2010,329:61