物理学咬文嚼字之四十二

共轭

曹则贤

（中国科学院物理研究所　北京　100190）

As goes marriage; so goes the nation.[1)]

——谚语

摘　要　Physics organizes its variables following a conjugation principle, handling the variables in conjugate variable pairs. However, thermodynamics and classical (quantum) mechanics take heed to this same principle with regard to two different pivot concepts: energy for the former and action for the latter. Shall this inconsistency be taken as a shortcoming of current physics? Can statistical mechanics offer a remedy? 本篇讨论与 conjugation 有关的概念，顺便提及的还有 duality, coupling, adjointness, reciprocity, juxtaposition 等.

多年前某个模糊的时刻，我问自己一个问题：物理学是如何组织的？虽然我认同"物理学最终应该是关于自然之独立于人的客观描述"的观点，但我看不出达成这一观点的途径，眼前的物理学更多地是关于自然的以人类自身为出发点的智力构造. 我发现，物理学家们[2)]是以能量为支点(pivot)组织热力学的，那里的物理量，分为广延量和强度量，是关于能量共轭的，以共轭变量对(conjugate variable pairs)的方式出现. 这包括 (p,V)，(S,T)，(μ,n)，(A,σ)，$(\vec{E},\vec{P})$，(H,M)，等等. 这样，从 $\mathrm{d}U=T\mathrm{d}S+p\mathrm{d}V+\sigma\mathrm{d}A+\sum_i\mu_i\mathrm{d}n_i+\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{P}+H:\mathrm{d}M+\cdots$[3)] 出发，配合关于全微分以及 Legender 变换的知识，热力学的全部内容就都在这里了. 除热力学以外的其它物理内容，我指的是力学，其是以作用(action[4)])为支点组织的，那里的物理量，是关于作用共轭的，这包括 (E,t)，(x,p)，角动量 J[5)] 等. 实际上，这里的共轭变量对源自数学的 Fourier 变换对(Fourier transformation duals)的概念，那里一对变量 (x,k) 各自表示的函数可以通过 $\mathrm{e}^{\pm ikx}$ 做积分变换，形成一种对偶的关系. 在量子力学早期文献中，这个 Fourier 变换被称作 Jordan 变换，积分核被写成类似 $\mathrm{e}^{\pm ipx/\hbar}$ 的形式，即涉及的是一对积的量纲为作用量的变量对，因此引入了普朗克常数来无量纲化. 这些共轭的物理量之间的所谓不确定性原理(uncertainty principle)在许多地方被人津津乐道，甚至被翻过来调过去地滥用——你一定既见过用不确定性原理从氢原子基态能量出发估算氢原子半径，也见过从氢原子半径出发估算氢原子基态能量的；甚至有人信誓旦旦地说粒子动量的不确定性越大，位置的不确定性越小，却懒得用方势阱的波函

---

1) 大意是"婚姻(conjugal relation)的方方面面反映一个国家的方方面面". 与 Conjugation 相关问题的重要性，由此可见一斑. ——笔者注

2) 我说的物理学家们是指参与了物理学的构建且其贡献哪怕是曾经被纳入了物理学建构的那些人，概念的内涵比日常生活中出现的 physicist 要狭隘很多. ——笔者注

3) 关于这个公式，有两点说明：(1)一般书本中，压力－体积这一项出现的形式为 $-p\mathrm{d}V$. 这个沿袭旧习惯的形式妨碍了热力学之公理化表达的美感，实在看不出有什么死抱着不放它的理由. (2)关于磁场－磁矩一项的形式，如果考虑到它们是 bivector 的事实，其乘法应同标量乘积 $S\mathrm{d}T$ 和矢量乘积 $\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{P}$ 相区别. 纯属个人观点，有兴趣的读者建议读读 Clifford 代数方面的内容. ——笔者注

4) 上来就把 action 译成作用量，妨碍对许多文献中 action 的正确理解. Action is action. 容另文讨论. ——笔者注

5) 请注意，$[x,p]=\mathrm{i}\hbar$，$[J_i,J_j]=\mathrm{i}\hbar\varepsilon_{ijk}J_k$，两者对应的代数完全不一样. 据说还有相位和电荷之间的共轭关系，但那好像要在规范场论中讨论. 此外，(E,t) 和 (x,p) 也不可同日而语，因为量子力学中时间 t 不是算符，所以关于 $E-t$ 的 uncertainty 关系式千奇百怪. ——笔者注

数验算一下[1]. 围绕作用量 S,或者量纲为能量密度的 Lagrangian $l(\varphi;\varphi';x,y,z,t)$——$S=\int l(\varphi;\varphi';x,y,z,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$,量子场论展开了对场的描述(注意,这里坐标不再是算符了). 考虑到 $l(\varphi;\varphi';x,y,z,t)$的量纲是能量密度,似乎这部分物理学依然是用能量为支点组织的. 且不管是关于能量还是关于作用量共轭的,物理学把物理量分成共轭变量对来处理这一事实在物理学文献中是得到了充分肯定的. 那么,共轭是什么意思呢?

共轭是一个来自牛车的物理学概念[6]. 所谓的轭,就是套在牛(ox)脖子处的枷具,一般为木制的. 牛拉车时,脖子上就要套上轭,所谓负轭.《古诗十九首》有句云"牵牛不负轭",言星既名牵牛,却不负轭拉车,不过徒有虚名而已[7]. 笔者小时候见过的牛轭(图 1),为单拱的,套在一头牛的肩上. 如果用两头牛拉车或犁地,两个轭或两头牛之间会用绳子软连接以确保牛力之间的夹角不会太大. 英文牛轭的说法有 oxbow,地学界有 oxbow lake 的说法,指由弯曲河流因流速不均匀在河道旁边造成的 U-形湖,汉语就叫牛轭湖(图 2). 英文中关于轭的另一个说法为 yoke,这个字来自德语的 Joch,更远点来自拉丁语动词 jungere,大家可能看出来了它就是英语动词 join. Yoke(yugo)据信来自梵语的 yuga,中文简单地音译为瑜珈. Yoke 本意有连接的意思,字典里就说它是套在两头牛的脖子上的(fitted around the necks of a pair of oxen),则作为牛轭它指的是双拱的结构(图 3),其作用是在两头牛之间建立起一个硬连接,确保二者用力之间的夹角为固定值. 在一些比较马虎的地方,yoke 不必是双拱的结构,用根木棒也能凑合[8]. Yoke (轭)的功能决定了它有控制、束缚的意思,这一点中西文皆同. 谭嗣同所谓的"官以名**轭**民",数学家 Hermann Weyl 的"the gods have imposed upon my writing the **yoke** of a foreign tongue that was not sung at my cradle",都是采用"束缚"的意思. Weyl 感叹写作时受到了不是使用母语(母语:摇篮曲使用的语言,the tongue sung at my cradle)的 yoke,那是一种什么样的感受呢? Weyl 接着写到:"Was das heissen will, weiss jeder, Der im Traum pferdlos geritten ist (这意味着什么,每一个梦见过自己跨下无马却一路驰骋的人都懂的)"[2]. 一个试图获得国际影响力的中国学者,大约都是曾有过这种感受的,我猜.

共轭(动词)是对 conjugate 的翻译,即 to join together in a pair, unite, couple 的意思. 考虑到 yoke 的原始用途,我认为 conjugate 强调的是在两个对象之间建立某种硬连接,比如关于婚姻的法律,英文即为 conjugal law. Conjugation 在语言学中指动词的变格、变位(grammatical conjugation). 意大利语动词 èssere(中文含义为"是")的 conjugation 也不知道有多少种,这恐怕对绝大多数学西语人来说都是梦魇. 在数学和物理学语境中,conjugate 以及一些相关词汇出现在许多场合,对这些词的深入

图 1 中式牛轭,单拱,其弯曲形状与牛的脖子共形(conformal)

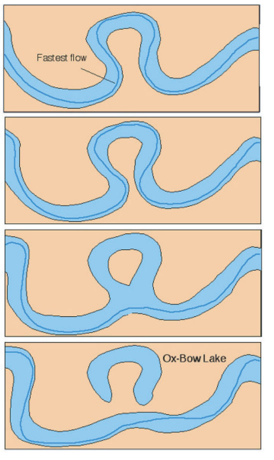

图 2 牛轭湖 (Oxbow lake)的形成机理

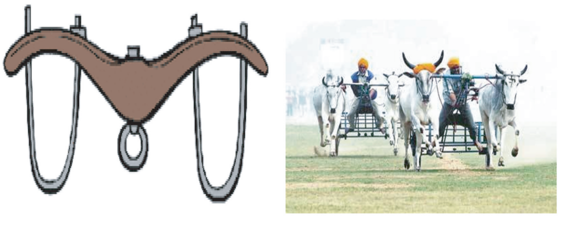

图 3 对应 yoke 的牛轭,在两头牛之间建立硬连接

6) 围绕一辆大车可以将物理学充分地展开. 辐条(半径,辐射,射线,元素氡等),轴(轴对称),刹车(Bremsstrahlung,即轫致辐射)等,都是物理学概念的起源. 共轭算是来自大车的外围吧. ——笔者注

7) 《小雅·大东》:"维南有箕,不可以颠扬;维北有斗,不可以挹酒浆"、"皖彼牵牛,不以服箱". 箕不能颠扬、斗不可以斟酌、牛不肯拉车,原来徒有虚名的事情古已有之. 南箕北斗光芒万丈的天空,其中的事件一定不可以常理度之. ——笔者注

8) 嫌麻烦,喜凑合,是一种感觉比较超脱的生活习惯。是不是不太利于做科学研究? ——笔者注

理解或许可为我们理解数学和物理提供一把方便的钥匙.

Conjugate 在对象间建立起硬连接,可以想见在数学和物理学中会随处可见其踪影.我们遇到的最简单的共轭关系是数学上的复共轭(complex conjugate),指的是一对复数 $x+\mathrm{i}y$ 和 $x-\mathrm{i}y$ 之间的关系.在复平面中,它们互为关于实数轴的镜象.考虑到复数是由一对实数决定的,因此可以看作是个二元(binary)数(a,b),只要明确其加法为$(a,b)+(c,d)=(a+b,c+d)$,乘法为$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$,则无需引入不太好理解的“i”了[9].既然复数是二元的,把 $z=x+\mathrm{i}y$ 和 $z^*=x-\mathrm{i}y$ 看作成一对独立变量就好理解了.在二维实平面上,保持 x^2+y^2 不变的变换有两个,分别为 $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$,前者为一转角为 θ 的转动,而后者中的变换矩阵则是前一个矩阵同$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$的乘积.矩阵$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$的作用是变换 $x\to x$;$y\to -y$,也即是复数语境下的共轭;它还是量子场论中的手征矩阵(chirality matrix)γ^5.复共轭是在一对复数之间通过一个操作建立的联系(connected by operation),相应地,若函数、方程之间建立了某种联系,也算构成了共轭关系.比如,对全纯[10]函数 $f=f(x,y)$,若 $\mathrm{d}f=g(x,y)\mathrm{d}x+h(x,y)\mathrm{d}y$,则有 $\partial g(x,y)/\partial y=\partial h(x,y)/\partial x$(且此时必有$-\partial h(x,y)/\partial y=\partial g(x,y)/\partial x$),此一关系被称为共轭方程(equation of conjugation),其实就是 Cauchy-Riemann 条件,在求解二维静电场/流场分布时会遇到.

比 complex conjugate 稍微复杂一点的共轭操作是转置共轭(conjugate transpose, Hermitian transpose, Hermitian conjugate, transposed conjugate, transjugate),即对矩阵 A_{ij},定义 $\widetilde{A}_{ij}=(A_{ji})^*$,即将矩阵元行列指标调换后再取复共轭.转置共轭,或者厄米特共轭(Hermitian conjugate)的英文又称为adjoint. Adjoint matrix (operator),汉译伴随矩阵(算符),似乎没能反映出 adjoint 的“合并”的意思,因为求矢量在变换后的模就会遇到操作 $\widetilde{A}A$,这才是 adjoint 的本意.与 adjoint 同源的字有 conjoint,英语意思为连接的,如 conjoined twin(连体双胞胎);法语作名词用,就是配偶的意思.如果一个矩阵满足$\widetilde{A}_{ij}=A_{ij}$,则我们说它是 hermitian 或者 self-adjoint (selbst-adjungiert,自伴随的).这个自伴随的概念反映的是一种对称性,在量子力学中具有特别的意义.量子力学要求对应力学量的算符是 hermitian 的,或者说算符所对应的矩阵应是自伴随的,因为自伴随矩阵的本征值为实.复函数构成的矢量空间上的运算确保给出实值,从而在基于复函数的量子力学之数学描述和物理实在之间建立了不是很牢靠但好在不是一眼看起来就很矛盾的联系.可见所谓的“…adjointness is a concept of fundamental logical and mathematical importance ”并非虚言.

在群论中,两个群元素 a 和 b,如果存在其它的群元素 g 使得 $gag^{-1}=b$,则 a 和 b 是共轭的(conjugate).这样的共轭关系(conjugacy)实质上是一种等价关系.针对任意元素 a,所有操作 gag^{-1}(g 为群的任一元素)的结果和元素 a 等价,形成一个关于元素 a 的共轭类(conjugacy class).共轭类的概念揭示了群元素间(相较于群的定义)更深层的等价关系.此外,最小多项式的复根也互为共轭元素(conjugate element).

William Rowan Hamilton 爵士是物理学家,更是数学家,数学、力学和光学在他的手里似乎是一个有机的整体[11].Hamilton 写过一篇文章“Theory of conjugate functions, or algebraic couples…”[3],可见“共轭函数”又叫“代数偶”,这让人想起 thermocouple(热偶),强调的是连接在一起具有某种功能的一对元素.在 Hamilton 力学语境中,对应于坐标 q 的共轭动量(conjugate momentum)为 $p=\partial H/\partial\dot{q}$,其中 H 为汉密顿量(Hamiltonian)[12].运动方程由 Hamilton 方程$\dot{q}=\partial H/\partial p$;$\dot{p}=-\partial H/\partial q$ 给出.提醒一

9) 我总觉得“i”是物理学内禀的一个对象,蕴含许多物理学的奥秘.把物理学中的“i”简单地当作 $x^2=-1$ 的根,正如在流行的相对论文献中那样,宁愿写成 $\mathrm{d}s^2=-c^2\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2$ 而不是写成 $\mathrm{d}s^2=(\mathrm{d}(\mathrm{i}ct))^2+\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2$,可能流失了一些物理的内容.——笔者注

10) Holomorphic function. Holo= combining form whole, entire; morph=form,所以 holomorphic 形容晶体时指 having the two ends symmetrical in form,类似连体双胞胎.在数学中,holomorphic mapping $f(z)$是 $f'(z)\neq 0$ 处的保角变换,这与 holomorphic 的意义能联系起来,但是汉译“全纯”不知出于什么考虑.——笔者注

11) 本就该是个有机的整体吧。专业的概念是否被过分强化了?其实几个人的学问能熬到自称懂专业的程度呢?——笔者注

12) 我总觉得 Hamiltonian 强调的是函数形式而不是什么量.——笔者注

下,共轭动量的概念在 Lagrange 力学中是没有的,在 Euler-Lagrange 方程中出现的变量对是广义坐标和广义速度.历史上,Noether 定理是从研究最小作用量原理得到的,但是用连续变换的语言描述可能比较易懂些:若体系关于某变量的变换是对称的,则变换之无穷小生成元,即共轭变量,为守恒量. Noether 定理的此种表述不必在意变量是否可以表示成算符;关于 Noether 定理和不确定性原理之间关系的问题,似应能揭示更多共轭变量对的内容,目前尚无系统的讨论.

利用一个关键概念把不同的领域统一起来,这让物理学显得很有条理.能量、作用量,就是这样的关键概念.进一步地,以这样的概念为支点,其它的物理量以共轭对的形式出现,则其同数学结构能"相当自然地"对应[13].共轭关系似乎成了构造物理框架所秉承的重要原则.然而,存在两组不同的共轭关系,或者说热力学和(经典、量子、电动)力学至少是表面上遵循不同的组织原则,会是物理学的一个缺陷吗?将两种共轭体系统一起来是否必要,统计力学能完成这个使命吗?希望这个困扰笔者的问题并不完全是一个琐碎的问题.注意到,作用量和能量不在一个层面.在经典力学中,能量守恒是同时间平移对称性相联系的,是能量-时间之间关于作用量(或者明确地说是拉格朗日量)共轭的结果.在热力学中,能量是最高层面的概念,能量守恒定律是先验的,不以时间平移对称性为前提.考虑到热力学的一个延伸说法,即所谓熵增加和时间方向一致,则时间,类比于熵,相较于能量是下一个层面上的概念.有趣的是,能量守恒定律是在热力学中率先确定的(1840—1847,焦耳,迈耶和赫姆霍兹),而在力学之拉格朗日量中的各种活力(vis viva,即动能)的概念,其形成要艰难的多(术语"势能"出现于 1853 年,术语"动能"出现于 1856 年.容另议).

数学和物理学关注对偶关系,不是习惯问题或者仅仅出于简单性的考虑.欲理解宏观大体系,则要先学会理解个体和相互作用,我们甚至以为弄懂了四种相互作用就可以完全理解这个物理世界,而相互作用本质上是两体或者两个对象(object)之间的问题.耦合、对偶、共轭、交互性(互反)等,都是描述两个对象间的简单关系.如何理解这些关系在数学和物理学中的地位,不妨比照一下人类中的共轭关系——婚姻.婚姻不仅是组织财富与继承关系的结构,它还具有将不同家庭的亲戚网络联系到一起的功能.西方学者认为,婚姻这样的 conjugal 结构,是社会的支柱,也是政府、企事业、军事的支柱.

关于共轭的概念,本文只提供一些粗浅的思考.不过从共轭出发,也许确实能让我们理解更多的物理内容.共轭的概念还可以推广吗?比如,是否粒子与反粒子是关于光子共轭的呢?看看类似 $e^+ + e^- \to \gamma$ 这样的反应,若将粒子和反粒子看作是关于光子共轭的关系而非简单地具有电荷共轭对称性(charge conjugation symmetry),是否能有助于更好地理解物质世界?这样,因为粒子-反粒子是关于光子共轭的,粒子与反粒子数目上的不对称性也许就无需解释.

Conjugation, duality, coupling, juxtaposition, adjointness 等,作为词汇和科学概念,笔者隐约感觉是有一些关联的.比如,来自对偶空间(dual space)变量的内积 $\tilde{V}\cdot V$,形式上就是 juxtaposition(并列放置),热力学和力学中的变量对,都是以 juxtaposition形式出现在公式中的.在 Dirac 的自旋理论中,出现 adjoint spinor(旋量),定义为 $\overline{\Psi}=\Psi^+\gamma^0$,其中 Ψ^+ 就是 Ψ 的转置共轭.也有把 adjoint spinor 称之为 Dirac conjugate spinor 的,可见 adjoint 和 conjugate 意义接近到可以混用.又,当我们谈到耦合时,耦合意味着一个自由度的存在引起了另一个自由度的广义坐标之共轭变量的出现,则耦合项可写为两广义坐标之 juxtaposition 的形式 $\alpha q_i Q_j$,其中的耦合系数确保该项的量纲与其他项同.此中深意,或还有可深究的地方.最后提及一点,共轭这个词不可避免地还出现在化学、生物学等科学领域,例如 conjugated polymer(共轭聚合物),conjugating gametes(并合配子)等等,此处不论.

参考文献

[1] 刘家福,张昌芳,曹则贤.物理,2010,38(7):491

[2] Weyl H, The classical groups. Princeton University Press,1946

[3] Hankins T L. Sir William Rowan Hamilton. The Johns Hopkins University Press,1980

13) 学会了二次型,二阶微分方程,各种 duality 和 reciprocity, binary (quaternion, octonion) number 等等与"二"有关的数学内容,可能有助于学到一点物理的实质.——笔者注