

物理学咬文嚼字之四十七

阻“你”振动

曹则贤

(中国科学院物理研究所 北京 100190)

所谓伊人,在水一方.溯洄从之,道阻且长.

——《诗经·秦风·蒹葭》

淫器不静,当路尼众.

——《墨子》

摘要 振动问题是物理学的原初问题. Damped oscillation 的汉译为阻尼振动,未必会理解错,但可能会念错.

振动问题简直就是物理学的原初问题(proto-typical problem). 都说量子力学和相对论是现代物理的两大支柱,但是若是抽掉了谐振子以及基于谐振子的各种振动模型,物理学的大半壁江山就塌了. 弄懂各种振动问题及其处理方式,无疑是掌握物理学的一条捷径.

经典力学的一个重要定律是胡克定律:在弹性范围内,一般固体材料的受力同形变成正比. 严格说来,这算不上什么定律,且无助于对固体力学性质的理解. 没有受力的情况下,形变可以看作是零,则不管固体对外力如何响应,在外力不大的时候,形变就和外力成正比,且外力去除后,固体恢复原状. 这就是所谓的弹性行为,在数学上表现为“乖(well-behaved)”函数在某个变量值附近的一阶近似. 反过来说,若给固体造成给定的形变,则必在固体内产生一个成正比的回复力(resilient force, restoring force). 中学教科书中的 $F = -kx$,说的就是这个意思. 设若弹簧上挂一个质量为 m 的物体,则物体的运动方程为 $m\ddot{x} = -kx$,解的一般形式为 $x = A\sin(\omega t) + x_0$. 表现出振动行为的体系,不管是力学的、电的还是什么体系,英语都是称为 oscillator,汉译振子.

但是,振子不是在真空中振动的,振子振动时会受到环境中流体(液体、气体分子)的拖曳(dragging effect),这个拖曳力依赖于速度,在速度不大的时候同样可以近似地看作同速度成正比,即 $F_d = -\lambda\dot{x}$. 这样,振子的方程就变成了 $\frac{d^2x}{dt^2} = -\lambda\dot{x} - kx$,或者可改写为 $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\eta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 0$,其中 $\omega_0^2 = k/m$. 这个方程的解,若无量纲量 $\eta < 1$,为 $x = e^{-\eta\omega_0 t}(A\sin\omega t$

$+ B\cos\omega t)$,其中 $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \eta^2}$. 这表明振荡的频率相较谐振频率, ω_0 ,降低了,且振幅在指数衰减. 这样的振荡被称为欠阻尼振荡(under damped oscillation),见图 1.

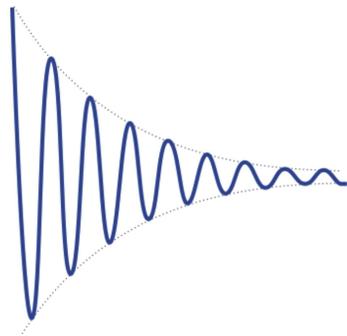


图 1 欠阻尼振荡,振幅随时间指数衰减

Damped oscillation,汉译阻尼振动. 但是,阻尼是什么意思,我一直是不甚了了. 提起尼字,许多人一般情况下能想起的词就是尼姑¹⁾,即梵语的比丘尼(bhidsunt, bhikui²⁾),这算是尼字用于外文翻译之一例. 其它遇到尼字的地方也多是用于翻译外来词,如 Nile(尼罗河), Nylon(尼龙), Nibelungenlied(尼伯龙根之歌)³⁾,发音一般也都是 ní(泥).

发 ní 音的尼字是近的意思,如不避远尼. 不过,尼亦作昵(nì),例如亲昵,所以尼字就更不见用处了. 那么,阻尼振动中的尼字是什么意思? 实际上这时的尼字发 nǐ(你)音,它本身就是阻的意思.《尔雅·释诂下》云:“尼,定也”,而《玉篇·尸部》也说:

1) 我这么说是 有实验根据的. ——笔者注
 2) 笔者对梵语一窍不通,不知拼法是否正确. 网上的拼法繁多. ——笔者注
 3) Nibelungenlied, 德国中世纪长篇叙事诗. ——笔者注

“尼,止也”。《墨子》中的“淫器不静,当路尼众”的尼字,就是拦路的意思。可见尼(ni)可用作制止、阻拦之意。《陶渊明集·移居》中有个故事:“同寓人常熟孝廉赵贵璞,字再白,倾盖相知,西林相公门下士也,欲荐余见西林,有尼之者,因而中止。”有尼之者,即有人阻拦的意思。可是当今一些大学者编辑的导读书,还真把它翻译成了“有僧人前来拜访”⁴⁾,误人不浅。

阻尼振荡,就是遭遇了阻挠之体系的振荡行为。想象一个空气中的振子,因为空气的阻力,一般情况下振动会是欠阻尼振荡。但若空气变得越来越稠,也就是方程中的 η 越来越大,则当 $\eta=1$ 时,自最大偏离位置开始运动的振子其振荡行为消失,振子会径直接近平衡点。这是所谓的临界阻尼(critically damped)行为。若 $\eta>1$,自最大偏离位置开始运动的振子会单调地接近平衡点,这是所谓的过阻尼(overdamped)行为。实际的应用中,如果要避免振荡发生的话,体系(如弹簧门)一般置于过阻尼状态。

有一类阻尼,来自振动体的内部,力的大小同位移成正比,但却是和速度同步(in phase),即 $f=-ihx$,这里的‘i’是单位虚数。这样,阻尼振动方程为 $\frac{d^2x}{dt^2}+k(1+i\eta)x=0$ 。这种所谓的模型实际上已经假设体系在作简谐振动了。从结果构造一个原因,添上几步计算就算解释了结果,这种学问在浅层面的物理学中常能见到。Wilczek把这种物理定律比喻为法律意义上的law,是在使用过程中才成型的^[1]。

阻尼振动似乎是一个简单的问题,普通力学课上的介绍也许就蛮详细的了。但是,如果我们愿意作一些形而上学的考察,会发现它隐藏着一个逻辑上的矛盾。我们知道,振动方程是牛顿第二定律的典型应用范例,它的思想是力造成了运动的改变。对于简谐振动,力源于弹簧的状态,与振子是否运动无关。但是在阻尼振动方程中代表阻尼的这项力,却来源于运动:是运动引起了阻力,且不同的运动状态造成不同的阻力。那么,到底是运动造成了力,还是力造成了运动(亚里士多德力学)或者运动的改变(牛顿力学)?不管我们采用哪种观点,都不能自洽地解释阻尼振动方程中的那两项力。那么,这个内在的矛盾该怎么消解呢?笔者以为,问题在于我们在力学中引入了力的概念。只要在力学中消除了力的概念,这样的逻辑矛盾就没有了。力概念在力学中的多余,先贤们早已经注意到了^[2]。

阻尼运动的拓展就是受迫阻尼振动,此时振子还受到一个随时间变化的外力作用,方程变成了

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\eta\omega_0\dot{x}+\omega_0^2x=f(t)$$

若外力 $f(t)$ 是脉冲式的,这个模型可以用来描写推人打秋千(图2);而若外力取 $f(t)=f_0\sin\omega t$ 的形式,这个模型就可以用来描述电磁中电子的运动。后者的渐进解为 $x=A\sin(\omega t+\phi)$,即与驱动信号同频率但是有个相位差的振动,且有 $A^2\propto\frac{\omega^4}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+(2\eta\omega_0\omega)^2}$ 。这个公式其实就是所谓的 Lorentz 线型(Lorentz line shape)的函数。为什么呢?



图2 仕女荡秋千。“推人荡秋千”可用受迫阻尼振荡加以模型化

十九世纪末,荷兰物理学家洛仑兹(Hendrik Lorentz)提出了一个分子同辐射场之间相互作用的模型:电子在分子中作阻尼振荡,即有一个形式为 $-kx$ 的回复力(这个力决定了一个本征振荡频率);同时,电子还受到一个形式为 $-\gamma\dot{x}$ 的阻力(否则无法解释驱动撤了振荡就停止的现象)。这样,当分子置于电磁场中时,就构成了一个受迫阻尼振荡体系。电子的振幅就是上述的表达式 $A^2\propto\frac{\omega^4}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+(2\eta\omega_0\omega)^2}$ 。不过注意到这个式子只在 $\omega=\omega_0$ 才有明显不同于零的值,所以它可以近似为 $A^2\propto\frac{\omega_0^2}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+2(\eta\omega_0)^2}$ 。假定电子发射的电磁波的强度正比于其振幅平方(很生硬的模型),则辐射的强度随频率的分布就应该是这样的函数,即呈洛仑兹线型(这里有个值得讨论的地方。常见有用光谱谱线宽度计算振子(能级)寿命的物理学。对固定的 ω_0 ,扫描激发源的频率 ω ,得到 $I(\omega)\propto A^2(\omega)$ 样的强度分布。这个谱线的宽度与振子寿命是什么关系?从受迫阻尼振荡为模型来看,这个谱线宽度反映的是单一频率 ω_0 的振子的内摩擦。用谱线宽

4) 差点就翻译成“有尼姑前来拜访”了。近年有知名学者把洋文中的孟子译成孟休斯,把洋文中的蒋介石翻译成常凯申,可见学术混混名家各个学科都有,见多了就懒得理了。——笔者注

度 $\Delta\omega$ 的倒数定义的寿命 τ 应该是振子的内禀性质。但是,将 $\Delta\omega\tau \sim 1$ 反过来发挥,比如以之为出发点解释什么 Uncertainty principle, 就莫名其妙了,因为 $\Delta\omega$ 是谱线表现的性质,其变量是外加的激发源频率,而 τ 才是振子的内禀性质。把来自不同对象的东西放在一起,算怎么回事? 困惑中。)我们看到,洛仑兹线型是一个电磁辐射力学模型解的近似结果而已,它同分子的辐射行为如果相符的话,一定是很令人惊讶的。更令人惊讶的是,一些人不知道各种所谓线型所依据的模型及近似,却信誓旦旦地宣称他们所测得的谱线是怎样完美的洛仑兹线型,或者高斯线型⁵⁾,并以之为出发点讨论基础物理问题,可爱之极。

关于受迫阻尼振动,有一个至关重要但却很少被提及的地方是,振子按照驱动源的频率规则地振动是一个渐近行为。在进入这个频率之前,还要加上一个暂态(transient)过程,可表示为 $x = A_{tr} e^{-\gamma\omega_0 t} \sin(\omega' t + \phi')$, $\omega' = \omega_0 \sqrt{1 - \gamma^2}$, 振幅和初相位的表达很复杂,这里不赘述。这里想说的意思是,根据初始条件的不同,这个暂态过程可能是很疯狂的,持续时间也很长(图3)。有许多测量过程本质上属于受迫阻尼振荡过程:用一定频率的源(可以作扫描)去激发样品中不同频率的振荡,从稳态振荡的振幅和相移来反推样品中各振荡模式的信息。这个方法正确使用的前提是受激发体系确实进入了稳定振动状态。显然,这不是一个 trivial 的问题;有些时候,等待进入稳定振动状态的 transient period 可能长得超出实验者的耐心。

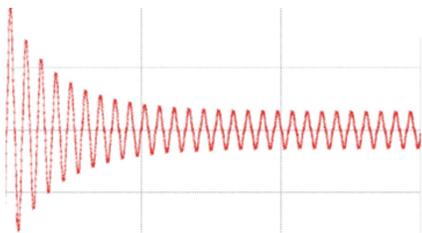


图3 受迫阻尼振荡在进入稳态之前要经历一个依赖初始条件的暂态过程

如果把阻尼系数也看成时间依赖的,或者给回复力加个非线性项,受迫阻尼振荡可被用来凑出对许多现象的描述。实际上,任何来回晃动(to swing to and fro)的现象都被试图用振子模型来加以理解。用量子力学方式处理谐振子,即求哈密顿量 $H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$ 的本征值问题,是量子力学的入门例题。量子化的奥秘在于动量和坐标之间的非对易关系 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$, 只要把动量替换成

$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ 即可;其对应的运动方程具有自伴随(self-adjoint)的性质,而这一点恰恰是量子力学之数学的核心内容。由此得来的谐振子本征值问题,是西方数学家在量子力学出现之前就玩熟了微分方程。阻尼振动的量子化按说是顺理成章的事情,但是因为其难度却很少有人提及^[3]。熟悉阻尼振荡问题经典解(应该归于易处理的问题之列)的人可能觉得难以置信,那是没注意到理论力学的基础——变分原理——不容易处理阻尼项的原因——带阻尼项的振动方程不具有自伴随结构。缺乏对阻尼振动问题的量子解,则对许多问题的理解只好以简谐振动为出发点。量子版本的谐振子解是讨论许多问题的基础,由谐振子问题量子化引出的所谓零点能的概念甚至成了粒子物理、宇宙学中的万灵药。难怪有人说,量子物理学中有解的问题,80%以上依赖谐振子模型。各种振荡问题(谐振、阻尼振荡、受迫阻尼振荡)在物理学中的作用,学物理者不可不察。

参考文献

- [1] Hertz H. The principles of mechanics; presented in a new form. University of Toronto Libraries (reproduced in 2011)
- [2] Wilczek F. Fantastic Realities. World Scientific, 2006
- [3] Ghosh S, Choudhuri A, Talukdar B. Acta Physica Polonica B, 2009, 40: 49

补缀 刘寄星研究员在阅读本文后转来一段评论,摘录如下,或有助于读者了解“阻尼”一词的来历:

1933年国立编译馆请中国物理学会提出物理学名词译名的初稿并审核物理学名词,成立了物理学名词审查委员会。该委员会共7人,杨肇濂先生为主任委员,其他6人为吴有训、周昌寿、何育杰、裘维裕、王守竞和严济慈。同年8月21日至9月2日,在中央研究院物理研究所召开了第一次名词审查会议。杨肇濂先生对此工作甚是积极,每日必到,并深入研究。据当时参加审查会议的钱临照先生回忆,当时议及“damping”一词,有译为“减幅”、“阻迟”等说,总觉未妥。翌日继续开会,杨肇濂先生一到会即说,昨夜忽得一“尼”字,有逐步减阻之意。此建议获得大家称赞,遂定将“damping”译为“阻尼”。……今年是中国物理学会成立80周年,借此机会讲一下这个故事,以纪念当年物理学会先贤们为物理学在中国的传播不辞劳苦的功绩。

5) Voigt 线型是两者的卷积,倒是提起来的场合较少。——笔者注