

编织拓扑物态中神奇的准粒子

2012年7月出版的 *Physics Today* 杂志刊登了耶鲁大学 Nicholas Read 教授撰写的《拓扑物态和准粒子编织》一文。文章深入浅出地介绍了拓扑物态的基本性质,准粒子交换和非阿贝尔统计,拓扑物态的物理实现及其在拓扑量子计算中的潜在应用。下面摘译其中的主要内容。

我们熟知的固液气三相以及其他常规物态可以通过局域性质来区分,例如系统中某一点的粒子密度,或者某一点附近一个小区域内的粒子数。传统凝聚态物理的观点是,如果在参数空间里的两相无法用任意一条路径光滑连接的话,这两相的对称性质一定存在着差别。例如固态冰破缺了液态水的平移对称性,粒子密度出现了空间上的周期调制——从无到有的调制表征了水到冰的相变。

当温度非常低或者说在零温下时,量子力学效应往往比热涨落更为重要。这时系统处于量子物态,粒子占据能量最低的基态。系统哈密顿量中参数的变化可以诱发量子相变,从而导致系统的对称性发生变化。量子力学中可观测量是由算符来描述的,其中局域观测量由局域算符来描述,只影响算符所在位置附近小范围内的系统。

拓扑物态中受能隙保护的基态

在传统的理解中,冰和水是不同的物态,它们有不同的对称性;另一方面,晶格冰有简并的基态,但由对称性相联系。这些传统的普适对称特征现在看来并不完备,物态可能只有拓扑性质的差别,基态的简并可以不涉及对称性,而涉及非局域的操作。在过去的30年里,理论物理学家发现了这种完善我们认识的量子物态,即拓扑物态。

考虑真空中或周期势中一群没有内部结构的点粒子。局域性意味着粒子之间只有短程相互作用,从而哈密顿量可以表示成局域算符之和。作用在基态上的局域算符一般把系统激发到高能态上。相对于基态而言,产生局域激发的最小能量称为能隙。如果系统的粒子数密度保持不变而粒子数趋向于无穷大时能隙持续存在,我们说系统处在拓扑物态。当哈密顿量稍作改变时,系统的能隙依然存在。

无限大的系统中可以存在无法用局域算符产生的能态,它们的激发能可能为零,即与基态简并。有意思的是,这些简并的基态可能既无法用任何局域算符互相映射,也无法用任何局域算符的期待值来区分。在这种情况下,哈密顿量的小变化无法改变基态的简并度。拓扑物态的基态简并度依赖于物态本身和边界条件,可以用来区分不同的拓扑物态。在拓扑物态中不改变的性质称为拓扑性质,包括能隙的存在以及给定边界条件下基态的简并度。拓扑性质不受哈密顿量被微扰的影响;事实上,这一点类似于数学中的拓扑学,后者研究不随描述物体形状的参数而改变的几何性质。

如果说基态简并度不可能通过在哈密顿量中加入微小的局域算符来解除的话,那么这些简并基态从局部看上去应该完全相同。在非常大的尺度上它们会有不同,但不可能从局部来探测这种差别。所以拓扑性质是全局的,是集体效应,但有别于传统物态中的集体效应。可以把这些态想象为液体,而波函数是粒子很多不同组态的量子叠加。拓扑性质依赖于长程的量子纠缠,而不是传统意义上的关联。

准粒子激发及其统计性质

拓扑物态中存在无法用局域算符产生或消灭的激发。从能量上说,这些激发态与基态不简并;也就是说,在空间中某些区域,可以用局域算符把这些态和基态区分开。这些区域通常是点状的缺陷(而不是线状的),无法用局域算符消除。这些需要非局域算符产生的缺陷被称为准粒子,它们的位置大致说来就是缺陷的中心。除去准粒子,这些激发态和基态没有区别,而准粒子的位置可以用局域算符来改变,从而准粒子就像粒子一样,可以有动能和有效质量。如果在哈密顿量中加入合适的局域项,它们也可以受到来自相应位置的吸引力或排斥力。

与基态类似,由给定位置而间隔又足够远的准粒子组成的激发态也可以是简并的¹⁾。这种简并的解除无法通过在哈密顿量中添加局域项来实现,特别是用来调控准粒子位置的局域算符,所以这些简并的准粒子态在局域是不可区分的。对于给定准粒子位置的系统来说,准粒子态的简并度随粒子数增加而指数增长。

准粒子态的拓扑简并暗示着拓扑物态在量子信息科学中有潜在的应用。在简并的准粒子态空间,量子信息是非局域储存的。当系统与环境耦合在一起时,这种存储的好处是显然的。如果起耦合效应的相互作用项是局域的,那么初始存储的信息无法在简并的子空间内退相干,这是相比其他量子计算方案来说最吸引人的地方。

如何对存储在简并准粒子态中的信息实现操控,也就是实现拓扑量子计算?为此,我们需要研究拓扑物态中准粒子的量子统计,也就是说,系统波函数在全同准粒子的交换下如何改变。从技术上说来,我们需要绝热地移动准粒子以实现交换。绝热保证了粒子移动时系统状态不被激发,从而准粒子交换的结果使系统获得了一个贝里相因子(不简并情

本栏目是经美国物理联合会(AIP)授权,与 *Physics Today* 合作的项目

1) 在真实世界中的有限系统内,准粒子态能量的简并不是严格的。由于局域激发能隙的存在,准粒子态能量间隙随准粒子之间距离的增加而指数衰减。由于所对应的特征长度是一个微观小尺度,因此在实际中准粒子态的简并假设是合理的。——译者注

况),或是在简并的准粒子态空间变换.后者等价于一个与初始状态无关的么正矩阵操作.

我们可以用时空中的路径,即世界线,来描述准粒子的交换过程.当一个由世界线组成的图可以连续形变到另一个时(同时保持世界线的端点不动),我们说它们是拓扑等价的,或者说属于同一个等价类;它们对系统状态的影响也是相同的.值得指出的是,在三维空间内所有实现相同准粒子置换的交换过程都是等价的,所以只有玻色和费米统计.在一维空间不存在交换过程,因为相应的世界线必定交叉.但在二维空间中,相互环绕的两条世界线和相互不环绕的两条世界线不等价(见图1).从而,在二维空间中存在无穷多个不同的等价类——它们被形象地称为辫子.

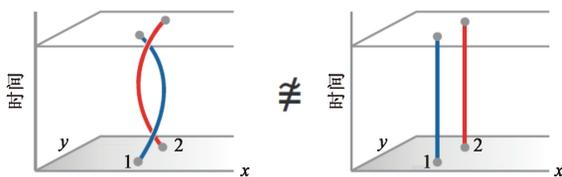


图1 拓扑物态中全同准粒子的交换可以用有两根空间轴和一个时间方向组成的图中的世界线来描述.特别地,相互环绕的两条世界线和相互不环绕的两条世界线不等价

所有的辫子组成一个群(即辫子群),可以用交换邻近的准粒子来生成,从而同一类型准粒子的统计可以用与这些基本交换对应的数或矩阵来描述.在二维空间中,基本交换可以对应于任意相因子 $e^{i\theta}$,其中 θ 称为相角.当 θ 不是 π 的整数倍时,准粒子被称为任意子,具有分数统计性质,因为相因子是可以交换的数,我们说,对应的任意子统计性质是阿贝尔的.

二维空间中的基本交换也可以对应作用在简并准粒子态空间上的矩阵.在这种情况下,准粒子统计性质是非阿贝尔的,因为不同交换的矩阵一般不对易.数学上,非阿贝尔统计和 Vaughan Jones 等人发现的拓扑不变的扭结多项式有关,后者可以用 Chern-Simons 规范场理论和二维共形场论来诠释.由于简并态中的准粒子有非阿贝尔统计性质,我们可以调控这些态中存储的信息.换句话说,这些简并态可以用来实现拓扑量子计算,这与传统的量子计算相比具有同样强大的计算能力.

拓扑物态的物理实现

最早发现的具有拓扑性质的物态是整数量子霍尔效应,产生于垂直磁场下的二维电子气,其中局域激发的能隙源于量子化的回旋运动.对每一个非零整数 ν ,存在一个不同的整数量子霍尔态.特别地,量子化的电导率与 ν 成正比,而有限系统存在无能隙的手征边缘激发态.其后发现的分数量子霍

尔效应产生于类似的实验条件,但 ν 可以是有理分数,而能隙源于电子之间的相互作用.除量子化的电导率和无能隙的边缘激发外,后者支持带分数电子电荷的准粒子激发,并且在某些边界条件下基态是简并的.绝大多数分数量子霍尔态属于阿贝尔态,即准粒子是服从阿贝尔统计的任意子.

1991年, Gregory Moore 和 Nickolas Read 提出了可以支持非阿贝尔统计性质的一类新的分数量子霍尔态,其中 n 个相互远离的准粒子可以形成 $2^{n/2}$ 个量子态.这个态可以在填充因子 $\nu=5/2$ 处实现,而实验上在这个条件下观测到了分数量子霍尔效应.数值研究显示,观测到的态是 Moore-Read 态,或者它的粒子-空穴共轭态. $\nu=5/2$ 态是目前实验关注的焦点,有可能是第一个支持非阿贝尔准粒子的真实系统,但其性质有待实验进一步确认.

除了量子霍尔系统外,拓扑物态也可能出现在二维 $p+ip$ 超导体中.在弱耦合条件下,超导体处在拓扑态,存在无能隙的手征边缘激发态,支持两种准粒子:反粒子是自身的 Majorana 费米子和带量子磁通为 $hc/2e$ 的涡旋.在每个涡核存在一个局域的自伴费米零模算符,暗示 n 个相互远离的涡旋形成 $2^{n/2}$ 个简并态,从而涡旋服从非阿贝尔统计²⁾.利用复合费米子理论, Moore-Read 量子霍尔态中的准粒子可以理解为与这里的涡旋类似.

与 $p+ip$ 超导态有些类似的拓扑态还包括一维、二维和三维的拓扑绝缘体.在拓扑绝缘体和超导体耦合的系统中寻找 Majorana 零模汇聚了目前大量的实验方面的工作,并有可能在最近的实验中得到了一些证据.拓扑超导体和拓扑绝缘体的研究指出,对于拓扑物态来说,强关联不是必要的,必要的是基态中的长程纠缠.同样有吸引力的拓扑系统还包括分数拓扑绝缘体和量子自旋的晶格系统.

正是这些研究让我们逐步认识到不同物态可能只有拓扑性质的差别,特别是基态简并度以及准粒子统计性质.当准粒子态简并时,准粒子服从非阿贝尔统计.这个量子物质中异乎寻常的概念也许会改变我们量子计算的模式.

(浙江大学 万歆 编译自 Nicholas Read, *Physics Today*, 2012, (7):38, 原文详见 <http://ptonline.aip.org>)

2) 值得强调的是,把涡旋称为 Majorana 费米子是错误的. Majorana 零模算符不激发准粒子,但改变由已经存在的涡旋形成的 $2^{n/2}$ 维低能简并空间中的量子态.因为简并态空间中涡旋交换的效应可以用被交换的涡旋上的零模算符来描述,所以零模算符构成非阿贝尔统计的一个表示.可参见 A. Stern *et al.* *Phys. Rev. B*, 2004, 70:205338. ——译者注