

玩四元数物理的还大有人在*

——为许方官《四元数物理学》而作

王正行

(北京大学物理学院 北京 100871)

捧着这部煌煌数十万字的遗著,我感慨万千.送走方官兄转眼两年多了.他家人嘱我为书作跋,我虽力所不逮,却不能推托.对这四元数我并不在行,说点感想吧.

“文革”后期我到北大汉中分校,就知道方官是虞福春和陈佳洱先生麾下两大理论家之一,但无缘相识.那时基础研究基本上都停了,只有加速器有任务,他在忙 4.5MV 静电加速器的设计和计算,我则在教比高中程度深一点的《基础物理》.我俩走到一起,是在十多年后.为了加强基础、淡化专业,技术物理系在虞先生指导下改革普通物理,把力学、热学、电磁学、光学、原子物理学 5 门课合并打通,作为一门课来讲.为此才把方官从加速器抽出来.这一讲就是十多年.其间我应国外朋友之邀去合作研究重离子碰撞与核物质,中途退出,留下方官坚守,直到退休.那时我主持系里教务,从微薄的经费中为主讲教师分别订了《大学物理》和《大学化学》杂志,方官就有文章在《大学物理》上发表.他写这四元数物理,大约从那时就开始了.方官后半生的主要成就,除了培养学生,就是这部大作.他写这本书,不只是“十年铸一剑”.

我这人是个杂家,自小就对各种稀奇古怪的东西感兴趣,一进北大,就在图书馆的书堆里发现了这四元数(quaternion)的书,但不求甚解,只是知道而已.现在学物理的,很少知道和玩这四元数了.其实,发明四元数的还是一位大物理学家.故事要追溯到 19 世纪上半叶.从 21 岁就开始做爱尔兰钦天监(天文台长)的哈密顿(William Rowan Hamilton, 1805—1865),在完成了他关于分析力学和光学的工作后,就于 1835 年转向了代数.那时复数是一个研究的热点,他想,既然二重数组(doublet)可以相乘,那么三重数组(triplet)呢?这个问题困扰了他将近十年,直到 1843 年 10 月 16 日.后来他在给儿子的信中回忆说:“在那个月的上半月,每天早上我下楼吃早饭时,你兄弟威廉·埃德温(William Edwin)和你总要问我,‘嗯,老爸,你能不能乘三重数组?’我则

使劲摇头,回答说,‘不行,我只能加减它们.’”那天他和太太沿着都柏林皇家运河散步时,突然想出了方程 $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ 的解.太激动了,他掏出刀子,把解答刻在了蓬车桥(Brougham Bridge)的石头上.那座桥现称金雀花桥(Broom Bridge)^[1,2].

在这之后,四元数的研究一度非常热,甚至引起亥维赛(Oliver Heaviside, 1850—1925)和泰特(Peter Guthrie Tait, 1831—1901)这两位大物理学家之间的争吵,数学家克利福德(William Kingdon Clifford, 1826—1883)则于 1873—1876 年把四元数推广成八元数(octonion)^[3].直到 19 世纪末,四元数研究都广为流行,甚至有一个“四元数及数学相关系统研究国际促进协会”.哈密顿则把余生全部用于研究四元数和寻找它的应用,于 1853 年出版了《关于四元数的演讲》,1866 年出版了遗著《四元数概论》,后者即方官书末所列参考文献[17].

几乎与哈密顿同时,德国数学家格拉斯曼(Hermann Grassmann, 1809—1877)于 1844 年提出维度理论(ausdehnungslehre),建立了一种 n 维空间的几何,在其中定义了 n 维矢量的运算.在美国物理学家吉布斯(John Willard Gibbs, 1839—1903)和英国物理学家亥维赛的努力下,矢量运算在物理学中成为宠儿.事实上,矢量运算也是四元数运算的一部分,矢量这个名字就是哈密顿起的.从这个意义上讲,四元数已经在物理学中留下了永久的印迹.

虽然哈密顿和格拉斯曼的理论都是矢量代数发展的源头,但四元数的运算包含了比矢量代数更多的东西.吉布斯曾经说过,他更喜欢格拉斯曼的限制较少的概念^[4].普遍与简洁是物理学永恒的追求.不过,有些物理用四元数有它的长处,比如方官这部书涉及的狭义相对论时空观、相对论力学、电磁学和相对论性量子力学.它们的共同点是都要用四维时空来描述.时间与空间毕竟还是不同,后者是三维矢量

* 本文是作者为许方官《四元数物理学》一书所写的跋(2012 年北京大学出版社出版),这里略有修改

空间,所以四维的时空用四元数来处理就是一种自然的选择。

当初发现的不是三重数组而是四重数组,是四维的,这完全出乎哈密顿的预料。所以,他最初的反应是舍弃第四维,令它为零,而称余下的部分为“固有四元数”(proper quaternion)^[5]。他万万没有想到,在身后40年会出来一个相对论,这正是他整个后半生苦苦寻找、孜孜以求的四元数最重要的应用。四元数天造地设般地四维时空一一对应,这造化之神奇既令人惊叹,更让人敬畏。如果相对论早出世半个世纪,没准物理的主流就是四元数的,谁知道呢?

涉及狭义相对论的物理是四维时空中的物理,现在流行的做法是用虚时坐标的欧氏空间,或用时空度规的闵氏空间。相比之下,采用四元数的做法,有点像是另类或者异数。当然,在学术上不靠人脉,不看人气,不玩少数服从多数,不讲成王败寇。学术问题有它自己的玩法(play rule)。自古英雄出少年,天才大抵是另类。所以,虽然不在物理的主流,但这个领域仍然相当活跃,玩四元数物理的大有人在,方官并不孤立。

狭义相对论的基本出发点,是四维时空的转动不变性,即时空间隔不随坐标的转动而改变。用四元数来说,就是时空双四元数的范数不变。所以,狭义相对论可以完全等效地用四元数来表述,这在意料之中。相对论力学的核心,是能量动量构成四维不变量,这又是一种双四元数不变的范数,所以相对论力学也可以纳入四元数的框架之中。电磁场是一种最简单的规范场,从相对性原理和定域规范不变性原理出发,可以严格和逻辑地得到麦克斯韦方程组和洛伦兹力的公式,也就是得到库仑定律、安培定律、法拉第电磁感应定律和磁场无源定律等实验定律^[6]。所以,时空双四元数的范数不变性加上定域规范不变性,就可以得到全部电磁学。最后,四元数的4个基 $1, i, j, k$ 对应于 2×2 的单位矩阵和3个泡利矩阵的集合,所以凡是涉及旋转的问题,特别是量子力学中的自旋以及狄拉克旋量,自然也可以用四元数来做。英国 *Nature* 杂志前主编玛多仕(John Maddox, 1925—2009)在对我国物理学家陈难先(清华大学教授,中国科学院院士)一个工作的评论中就曾说过^[7]:“全部数学都有应用的潜力,数学家们在文献中凌乱地扔了一些珍贵的技巧,等着人们来发现其用途。简单说吧,19世纪备受关注的连分数,被证明在场论里用得着,不是吗?为了使得矢量代数完备而定义一个商,从而才发明的哈密顿四元数,不

也发现与相对论性量子力学的旋量代数有着有趣的联系吗?”真的,方官就与严亮合作写过一篇论文《四元数在力学和电磁学中的应用》,又与陆元荣合作写过一篇论文《四元数在量子力学中的应用》,2001年先后发表于《大学物理》^[8,9]。

英雄所见略同,所以可在文献中找到许多方官的同道,这也是一个圈子。举例来说,如马来西亚的沙哈拉姆(Shah Alam)和萨巴·鲍克(Sabar Bauk),他们用四元数推导洛伦兹变换及其速度相加公式,并讨论了有关的性质和应用,其论文《四元数洛伦兹变换》发表于2011年^[5]。这是关于狭义相对论的时空观。关于力学,如美国南加州大学的伍德瓦嘉(Udwadia)和沙特(Schutte),他们推导出刚体转动动力学的四元数方程,其论文发表于2010年^[10]。关于电磁学,如美国纽约州立大学水牛城分校的温南斯(Winans),他把真空中的麦克斯韦电磁方程表达成单个的四元数方程,其论文《四元数物理量》发表于1977年^[11]。而更早一些,爱德蒙斯(Edmonds)就提出可以把电荷当作四元数^[12]。关于量子力学,有意大利斯科拉里西(Scolarici)和索罗布里诺(Solombrino)的论文《磁群的四元数表示》,于1997年发表于 *Journal of Mathematical Physics*^[13],美国普林斯顿高等研究院的阿德勒(Adler)甚至写了专著《四元数量子力学和量子场》,于1995年由牛津大学出版社出版^[14]。而关于量子场论中的规范场,则有印度比仕特(Bisht)和奈吉(Negi)的论文《戴孙的阿贝尔与非阿贝尔规范理论的四元数—八元数的解析性》,发表于2008年^[15],还有印度普士帕(Pushpa)、比仕特、中国科学院理论物理研究所李田军和印度奈吉合作的论文《用四元数八元数重新表述量子色动力学》,发表于2011年^[16]。

以上所举,还都是四元数在物理学中的应用。在工程、电脑和制图等实用领域,四元数的应用就更加活跃,有的甚至扮演了主角。所以,在美国的大学里,有讲授四元数应用的课程,也有专门讨论四元数教学方法的文章^[17],这里就不多说。

或许有人会问,现在流行的做法已经很好,还另起炉灶用四元数来做,有必要吗?这就用得着费曼(R. P. Feynman, 1918—1988)的一句话^[18]:“完全针对同一个物理,每个好一点的理论物理学家都知道六七种不同的理论表述。”不同的表述虽然在数学和形式上等效,在物理上却不一定相同。氢原子光谱的巴尔末公式与里德伯公式在数学上完全等价,但只是从里德伯公式,玻尔才悟出他的七巧板的最后一块,构造

出著名的氢原子模型. 玻恩把海森伯二元数组的指标简单地改写了一下, 才发现这正是矩阵, 从而建立了矩阵力学, 也就是量子力学. 他们和约当以及狄拉克创建量子力学时, 是从哈密顿正则力学出发, 薛定谔创建波动力学时, 则是从哈密顿-雅可比方程出发, 虽然经典力学的这两种表述都与牛顿三定律等效. 例子太多了. 说不定将来理论的突破就是从四元数物理开始, 谁敢说不呢? 这就只能让时间来裁判.

这类研究型著作, 不可避免会有见仁见智的问题. 可惜方官已经走了, 不可能再向他讨教. 事实上, 作为研究型著作, 通常还会提到这个领域其他人的工作, 让读者对各个相关的研究有所了解, 并注出文献, 为读者进一步查阅提供方便. 方官的书中没有这些内容. 当然, 这并不是必须的, 不影响本书的水准和价值. 方官的工作即便与别人有交集, 也绝不可能完全相同, 因为他是独立的. 正如我国著名理论物理学家王竹溪先生所说, 对于同一个题目, 两个人互相独立地去做, 结果不可能完全雷同^[19]. 而且, 如果知道方官写作的情景, 对此也就不会苛求了.

人生的旅途真的是各不相同. 方官的最后十年, 每周要去北医三院做两三次透析, 走得很苦. 可以说, 他的这部著作, 是在这种被病痛封闭、挟制、恐吓、折磨的炼狱中铸就的. 他不能参加学术会议与人交流, 不能奔波于图书馆查阅各种资料, 当时的网络也还没有现在这样全面便捷的搜索服务, 而他还要时时应对病魔的纠缠. 在这艰难困苦的条件下, 方官争分夺秒, 不屈不挠, 为我们留下了这份弥足珍贵的遗著. 两年前, 我曾在一篇文章中提到方官这份遗稿^[20], 就有读者问起书的内容. 现在这书已出版面市, 奉献给大家. 我想在此再说一句: 谢谢方官, 你安息吧!

参考文献

- [1] <http://world.std.com/~sweetser/quaternions/intro/history/history.html>
- [2] 四元数. 百度百科
- [3] 斯特洛伊克 D J 著, 关姻译. 数学简史. 北京: 科学出版社, 1956
- [4] 格拉斯曼. 百度百科
- [5] Md. Shah Alam, Sabar Bauk. Physics Essays, 2011, 24: 2
- [6] 王正行. 近代物理学(第二版). 北京: 北京大学出版社, 2010
- [7] Maddox J. Nature, 1990, 344: 377
- [8] 许方官, 严亮. 大学物理, 2001, 20(9): 30 [Xu F G, Yan L. Daxue Wuli (college Physics), 2001, 20(9): 30 (in Chinese)]
- [9] 许方官, 陆元荣. 大学物理, 2001, 20(11): 21 [Xu F G, Lu Y R. Daxue Wuli (college Physics), 2001, 20(11): 21 (in Chinese)]
- [10] Udwardia F E, Schutte A D. Journal of Applied Mechanics, 2010, 77: 044505
- [11] Winans J G. Foundations of Physics, 1977, 7: 341
- [12] Edmonds Jr. J D. Foundations of Physics, 1973, 3: 313; American Journal of Physics, 1974, 42: 220
- [13] Sclarici G, Solombrino L. Journal of Mathematical Physics, 1997, 38: 1147
- [14] Adler S L. Quaternionic Quantum Mechanics and Quantum Fields. Oxford University, New York, 1995
- [15] Bisht P S, Negi O P S. International Journal of Theoretical Physics, 2008, 47: 1497
- [16] Pushpa, Bisht P S, Li T J, Negi O P S. International Journal of Theoretical Physics, 2011, 50: 594
- [17] McDonald J. Computer Graphics Forum, 2010, 29: 2447
- [18] 费曼 R P 著, 关洪译. 物理定律的本性. 长沙: 湖南科学技术出版社, 2005
- [19] 王正行. 严谨与简洁之美——王竹溪一生的物理追求. 北京: 北京大学出版社, 2008
- [20] 王正行. 物理, 2010, 39(8): 550 [Wang Z X. Wuli(Physics), 2010, 39(8): 550 (in Chinese)]