物理学咬文嚼字之五十三
形之变

曹则贤
(中国科学院物理研究所　北京　100190)

In nova fert animus mutatas dicere formas corpora…
——Ovid, *Metamorphoses*[1)]
Everyone wants to transform, but nobody wants to change.
——Frederica Mathewes-Green

摘　要　变换是数学和物理的主题，也是文学艺术的主题．变换(变形)的概念包括change，mutation，transformation，metamorphosis等．

小时候给我印象最深的故事是《孙悟空三打白骨精》：“唐僧师徒四人来到白骨岭．白骨精为了赚取唐僧，接连变成村姑、老太婆和老头的模样以接近唐僧．但不幸的是，偏巧孙悟空是个火眼金睛的家伙，能看出妖怪变化前的原形，于是接二连三将妖怪的变形打破，后来干脆用三昧真火把白骨精的原形给烧了．” 《西游记》中这样的变形(换)故事很多，且变形被认为是一种本领——孙悟空会七十二变，二郎神会七十三变，二郎神就比孙悟空厉害．在“小圣施威降大圣”一节中，孙悟空腾挪变化，却总是受制于人：悟空变成麻雀，二郎神就变成饿鹰儿；悟空变成小鱼儿，二郎神就变成了鱼鹰．这些变形的故事，可能是《西游记》中最为人津津乐道的情节．

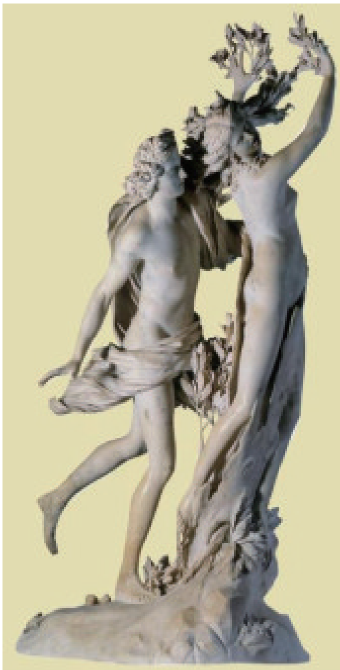

图1　Bernini的大理石雕塑：阿波罗与达芙妮

无独有偶，西方文学中也有以变形为主线的文学作品，最著名的就是拉丁文的*metamorphoses*(《变形记》)．《变形记》大约成书于公元8年，共有15卷，描述了罗马神话和希腊神话中的世界历史，包含有250个关于变形的故事，其中许多已深深融入了西方的文学史与艺术史，影响着当代人的生活．一个著名的变形故事是达芙妮(Daphne，Δάφνη)变成月桂树．达芙妮发誓永保童贞，阿波罗 (Apollo)却疯狂地迷恋上了她．无奈之下达芙妮向众神求助，众神于是把她变成了一株月桂树(Laurel tree)．阿波罗追求达芙妮的神话是西方艺术作品中常见的主题．据说，达芙妮变成了月桂树后，阿波罗仍拥抱着月桂树(图1)，不依不饶地叙说他的缠绵：“you shall assuredly be my tree. I will wear you for my crown；I will decorate with you my harp and my quiver(你变成树也是我的树．我要把你做成冠带着；我要用你装饰我的竖琴和箭囊)…”，这是希腊胜利者带桂冠之习俗的由来．今日的诺

1)　奥维德《变形记》中的第一句．我觉得应该译为“Let me tell of figures that change into new being (让我来表一表那些变成新样式的形体的故事)”，这与英译本略有不同．——笔者注

图2　Actaeon被女神Artemis变成鹿（意大利画家Giuseppe Cesari (1568—1640)绘）

贝尔奖得主，Nobel prize winner，也有Nobel prize laureate的说法，也由此而来．在类似的另一则关于变形的神话中，猎手Actaeon误入林中看到了沐浴的女神Artemis，作为惩罚，女神Artemis不许Actaeon再说话．在听到同伴呼唤时，Actaeon忍不住叫出声来，于是立马被变成了一头鹿(图2)．

所谓的达芙妮被变成了月桂树，或者Actaeon被变成了一头鹿，这里用到的动词是transform，故事的核心是关于transformation的．Transform＝trans+form，就是“将形状变成别的什么”的意思，如所谓的“Actaeon被变成了一头鹿”，英文就是“Actaeon was **transformed** into a stag”．Transform可以简单地理解为to change the form，如达芙妮受不了阿波罗的纠缠，其向其父呼救时喊的是：“open the earth to enclose me，or **change my form**，which has brought me into this danger!”另一则变形故事中，主角是Cadmus，即那个把腓尼基字母引入希腊的人，和他的妻子Harmonia．Harmonia，汉译和谐、调谐(本意是安装到位的意思)，是一个贯穿西方文化的概念，自然也是数学和物理中时常遇到的概念，例如harmonic analysis（调和分析)，harmonic oscillator（谐振子)等．Cadmus曾杀死一条恶龙，从此遭了恶运．Cadmus抱怨道：如果神们那么钟爱一条蛇的生命，那我也想过蛇的生活．Immediately he began to grow scales and **change** in form. Harmonia，seeing the **transformation**，thereupon begged the gods to share her husband's fate，which they granted (于是，他马上长出了鳞片，身体开始变形．Harmonia目睹了变形的过程，求神让她和丈夫共命运，也得到了恩准)．在变形这一点上，transform的一个同义词是translate[2)]，如关于狩猎女神Diana把猎户Orion变成星座的故事，英文是这样表达的：“It was Diana who later **translated** the giant into the starry constellation，after Orion (猎户座)had unwisely directed his rapacious intentions towards her (是Diana在发现猎户Orion对她有不良企图后，将这个巨人变成了星座)”．神话里的形变故事，应该是源自对日常观察到的风云变幻的推广和拟人化．

Transform是数学和物理学的主题，英文中transform和transformation会混用，中文一般都译成“变换”．数学经常讨论的问题就是如何变换，而且这些变换经常会被应用到物理学上．对任何一个数学对象施加一个操作使之变成别的对象就是进行了一次变换，这个变换就是函数(function)或者映射(mapping)．矢量空间的线性变换比较简单，为人们所熟悉．对矢量的线性变化满足如下条件：$f(\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2)=\lambda_1 f(v_1)+\lambda_2 f(v_2)$．这样的变换之所以被称为线性变换是因为它会把一条线变换成线(或者零)．考虑到经典物理和量子物理到处都是叠加原理，线性变换的重要性怎么强调都不为过．线性变换可以是跨维度的，例如变换

$$\begin{bmatrix}0&1\\3&2\\1&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(y,3x+2y,x)$$

就把一条二维空间中的线，$y=kx+y_0$，变换成三维空间的一条线．跨维度的变换是很神奇的．一个类似的变换是所谓的Euler β－函数$\beta(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$，这可以看作是从单变量函数到两变量函数的变换，据说作为最高深理论的弦论就起始于Veneziano从这个函数得到的灵感[3)]．

线性变换保持一条线为一条线，更一般的变换是conformal map，共形变换．Conformal map是保角(angle-preserving)的变换函

2)　Translate就是transfer，有改变、变形的意思. 汉语将它译成“翻译”，应该强调其“笔译”的内涵，与interpret(口译)有别．Interpret有如何理解、诠释的意思，Interpretation是量子力学的重要问题，容另议．——笔者注

3)　这样不停地外延而构建的所谓物理理论，有让人担心的理由．——笔者注

数，即保持无穷小图形的形状不变，以前的复变函数课本干脆就称之为保角变换．一个表面可以在不引入夹角失真的前提下被抚平，容易理解复平面上的保角变换是学习conformal map简单的入门课程．保角变换将许多类似求电磁势能的问题变得简单，可惜笔者上大学时老师只提保角变换．笔者斗胆提议，**物理学不妨和数学混在一起教授**．

相似变换(similarity transformation)是一类较特殊的保角变换．相似变换指的是导致几何相似性的“矩阵变换”．相似变换和自相似是分形的重要基础，分形中常提到的变换是面包师变换．相似变换是这样的conformal mapping，其将矩阵A变换为A'，$A'=BAB^{-1}$，变换后矩阵A的值不变，即$\det(A')=\det(BAB^{-1})=\det(A)$．相应的，矩阵的迹和本征值也都不变．相似变换表示不同基上的同一个线性变换，变换矩阵B就是“change of basis”矩阵．如果变换后能得到简单形式的A'，比方说对角的，许多问题的研究或证明会变得简单．顺便提一句，每个矩阵都是同其transpose相似的．在群论中，若H为群G中的一个子群，x为不在H中的群元素，则相似变换xHx^{-1}仍为一子群．就矩阵群而言，相似变换又称为conjugacy，相似矩阵互为conjugate (共轭的)[1]．相似变换的一般形式$A'=BAB^{-1}$能保守乘法的性质，如关于动力学的坐标与动量的相似变换$Q=bqb^{-1}$，$P=bpb^{-1}$，若p，q满足交换关系如$[p, q]=\mathrm{i}\hbar$，则P，Q也满足．

任何一篇谈论变换的文章恐怕都不应该漏过傅立叶变换(Fourier transform). 1812年的一个早上，Jean Baptiste Josef Fourier发现将函数$f(x)$通过如下变换$g(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}f(x)\mathrm{d}x$变成函数$g(k)$可以方便地解决很多问题，比如传热问题[2]．逆变换为$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}g(k)\mathrm{d}k$．笔者以为，这就是一个加权平均．Fourier变换有isometry(等度规)的性质：如果$f_1(x)$和$f_2(x)$对应的变换为$g_1(k)$和$g_2(k)$，则有Parseval-Plancherel定理$\int f_1^*(x)f_2(x)\mathrm{d}x=\int g_1^*(k)g_2(k)\mathrm{d}k$．此外，若函数$f(x)=\int f_1(x-y)f_2(y)\mathrm{d}y$，则有$g(k)=g_1(k)g_2(k)$[3]．由此，可推出Fourier变换的一个性质：$|g(k)|^2$的support (不为零的区域)越集中，则$|f(x)|^2$的support越分散；反过来也一样．如果变换对应的函数都是归一的，$\int|f(x)|^2\mathrm{d}x=1$，$\int|g(k)|^2\mathrm{d}k=1$，则有$\Delta x\Delta k\geqslant 1/2$．有些读者可能已经注意到，这和量子力学中的不确定性原理表述是一样的．实际上，Heisenberg 1927年的原文讨论的就是Fourier变换，虽然那里它被称为量子力学的Jordan变换[4]．这再次告诉我们，这玩艺和世界的量子性无关，它不过是函数的性质而已——除非类似Fourier变换的性质是物理实在(Reality)的唯一描述[5]．

比Fourier更一般的变换是Laplace变换，$g(s)=\int \mathrm{e}^{-sx}f(x)\mathrm{d}x$，这里的$s$是个复数．变换的宗旨是把关于$f(x)$代表的函数关系或操作给变简单了．笔者基于博士论文的一篇文章中就用Laplace变换解了关于偏析的复杂微分方程[6]，如今已经忘了当年是怎么做到的了．Fourier变换是物理学中许多问题的根本内容，如晶体学、量子力学、传热、衍射、CT技术等．

注意，Fourier变换的重要性在于它有逆变换，在数学意义上，由$g(k)$经逆变换导出$f(x)$没有任何问题．在实际应用中，由于空间有限性问题，如被X射线照射到的晶体就是毫米甚至微米尺度的大小，远不是数学计算中的无穷大，则由衍射斑点经逆运算求实空间中原子的分布可能根本得不到正确的结果．一个例子就是关于Si(111)-7×7再构的研究．电子衍射获得了7×7的衍射花样，但由衍射花样来计算原子的分布，虽然发表了大量的论文，却没有一个是正确的．直到有了STM直观地观察固体表面上的原子，人们才弄清楚了Si(111)-7×7再构的原子分布．这再再提醒我们，基于非严格的数学可能无法获得物理的真实，如果加上近似计算则会更糟糕．

物理学研究自然，通过观察、测量、思考、构造理论框架、验证、诠释等一套繁复程序实现对自然的理解．其中观察，察的当然是形，即西文文献中常见到的shape，form，morph，Gestalt (德语，汉语常采音译“格式塔”以糊弄读者)等．Morph，就是用于构词的form，出现在如morphgenesis (形态发生)，morphology (形貌)等词汇中．地理学和薄膜生长都会关注morphology问题，非晶材料又被称为amorphous，汉译“无定形的”．Form之于物理学的重要性，薛定谔曾有精彩论述[7]，此处不再赘述．自然地，形状的改变，包括deform，transformation，information，也是物理学的重要内容. 笔者有种感觉，好像物理也总是在忙乎transformation这事，甚至说它是近代物理的根本性内容都不过分．Dirac就曾写到：“…both relativity and quantum theory seeming to show that **transformations** are of more fundamental importance than equations[8] (相对论和量子理论看起来都表明变换比方程更具重要性)”.

物理学首先研究的是运动，而运动就是关于时间的变换4) [9].就相对论而言，其关键是所谓的Lorentz transformation，那是法国年轻人Woldemar Voigt先给出的．这是一个使得由麦克斯韦方程组得来的波动方程 $\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$ 保持形式不变的坐标变换，实际上也是保持时空间距 $ds^2=c^2dt^2-dx^2$ 不变的变换．而所谓的量子力学，就以非相对论的薛定谔方程而论，也可以看作是变换的问题．薛定谔方程中的 $H\Psi$ 可以理解为哈密顿量作为操作(算符)对波函数 Ψ 作了变换．变到哪里去了呢？静态薛定谔方程表明变到 Ψ 自身(eigen)上了，$H\Psi=E\Psi$ 所以薛定谔认为量子化就是个本征值问题[10]．为了更好地理解这一点，看看矩阵 A 对一个欧几里得空间中矢量 v 变换的结果．矩阵变换一个矢量的效果可以看成是转动加伸缩的综合．对于某些特殊的矢量，变换效果中没有转动的成分(矢量方向不变)，$Av_\lambda=\lambda v_\lambda$，这里的 λ 称为矩阵 A 的本征值，v_λ 为对应 λ 的本征矢量．容易看出矩阵本征值问题和定态薛定谔方程具有相同的形式．薛定谔1926年开创新量子力学的论文就是以“Quantizierung als Eigenwertproblem(量子化作为本征值问题)”为题的[10]． 在接下来的量子力学理论中，比如谈论对易关系和描述动力学的不同绘景(picture)中，就会遇到算符的相似变换，因为对易关系和波函数的在 L^2－空间中的积分问题本质上都是乘法而已．如果在讲授量子力学过程中能澄清这些问题，或许量子力学就不会那么唬人．至于更近代的规范场论，依然是关于变换的，不过涉及的是让拉格朗日量不变的局域变换(local transformations)．关于局域变换的一个相当恰当的比喻是货币的对比：一克黄金就是一克黄金，但在不同国家里，它可能被等价于不同的当地币值．

热力学的关键也是变换．由基本关系式 $dU=TdS-pdV+\sigma dA+\sum_i\mu_i dn_i+\vec{E}\cdot d\vec{P}+H{:}dM+\cdots$ 出发，经Legendre变换为能简化问题的热力学势，由该热力学势对变量微分不分顺序就能得到一些热力学关系，这即是热力学的基本内容[11]．Legendre变换是个很神奇的共形变换，哈密顿量和拉格朗日量之间的关系就是Legendre变换．在经典力学的哈密顿力学形式中，坐标和共轭动量满足哈密顿方程 $\dot{p}=-\partial H/\partial q$，$\dot{q}=\partial H/\partial p$．对坐标和共轭动量做变换，要求变换的结果仍满足哈密顿方程，则称变换是正则变换(canonical transformation)． 在四类正则变换中，第二类正则变换允许波动力学的形式，这一点尤其值得注意．

与transformation (transfigure)同义的metamorphosis，如今也仍然作为专业术语在使用，比如在生物学中．毛毛虫化成蝶的过程就是metamorphosis (图3)． 蛹化蝶常被用来比喻境界的升华．网上有句云：无论是蝶变还是蝉蜕，昆虫们为了求得本己，都要经历近乎不可能的异化、实证地**成为自身的他者**．成为自身的他者可看作是对self-transformation的翻译． Such self-transformation is the most difficult and dangerous challenge to the imagination，and it is the most rewarding (Self-transformation是对想象力之最困难、最危险的挑战，也是高回报的——Rob-

图3　蝴蝶破茧而出．茧之前的形态是毛毛虫

4)　也许是运动，或者变换，定义了时间．——笔者注

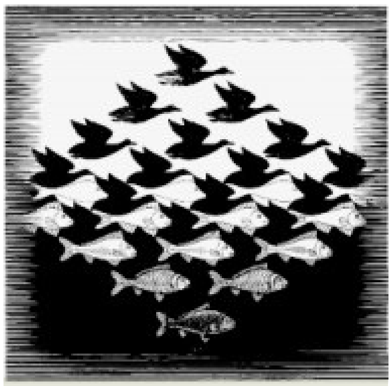

图4　Escher的雕刻：Metamorphosis

ert Grudin语). 不过世界上不乏想象力丰富的人．M. C. Escher是一位具有科学深度和精度的、想象力丰富的画家，他的一幅以metamorphosis为题的雕刻(图4)，笔者以为对于理解相变(phase transition)都有帮助．当然，物理学中也还把变化、变形称为metamorphosis．中子衰变成质子就被称为是metamorphosis，在这个过程中，中子中的一个d－夸克变成了u－夸克，释放出一个虚的W$^-$－玻色子，W$^-$－玻色子瞬间衰变为一个电子和一个反中微子$\bar{\nu}_e$(图5)．中微子三种不同的质量本征态或味本征态之间的振荡，也被称为metamorphoses[12, 13]．描述这样的衰变过程还有一个词transmutation，汉译嬗变，其词干为拉丁语mutare，它正是Ovid的*metamorphoses*中用到的关键动词．

运动，或曰，变换，是世界存在的方式．变换在数学和物理中的地位具有天然的属性——换个角度看问题是大智慧．然而，在纷乱的变换中，有些却是不变的——我们的世界在上帝看来是透明的规律，而不是纷乱的事实[14]．因此，人们更感兴趣的是那些preserve(保守住)什么东西的变换(preserving transformation)，而定律(规律，law)则更多的是关于那些conserved物理量(守恒量)的．

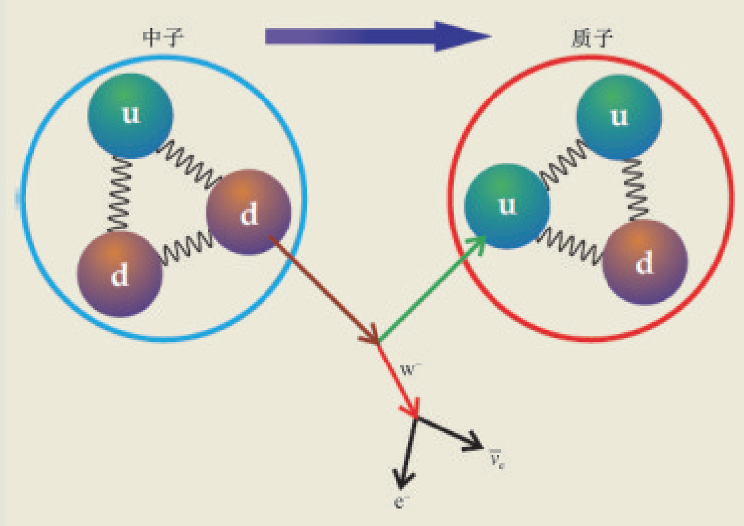

图5　中子变成质子的metamorphosis过程

图6　图形的连续变化可以由函数的变换实现

数学变换不仅可以帮助解决物理问题，也用于实际问题．CT扫描能成功，靠的是Fourier变换处理图像的能力，今天的人们能看到动漫，很大程度是因为图像可以通过简单的函数实现连续变化(图6)．令人惊奇的是，自然界的生物竟有能连续变形实现动态模仿(dynamic-mimicry)的家伙．1998年人们发现了一种Indo-malayan八爪鱼，它可以变成海蛇恐吓捕猎者，可以变成比如平鱼混迹于周围环境以躲避猎食者，还可以变成海星、海马以诱捕猎物，因此被命名为模仿章鱼(Mimic Octopus)．要命的是，它的transformation包括形体和颜色两方面，而且是动态的[15](图7)．

变换与不变量同样可以有助于对社会的理解．人类中具有欺骗同类能力的家伙发明的理论幌子千变万化，但基因的自私(selfishness of gene)却没变，决定生物自私性的热力学定律没变！小说《白鹿原》5)要传达的就是关于不变量的道理：城头的旗号可以变，标榜的主义可以变，但是世道却永远不会变．当白嘉轩认识到这一点时，“气血蒙眼”，昏死了过去；当鹿子霖认识到这一

5)　如果说新时期中国有什么立意与文笔俱佳的文学作品的话，陈忠实先生的《白鹿原》算一部．当然，这一点不能指望北欧人明白．——笔者注

图7　天才的变形大师——模仿章鱼(Mimic Octopus)

点时，整个人突然崩溃了．如果他们是个物理学家的话，认识到这一点或许该有豁然开朗的感觉．变换是魔术师的障眼法，不变量才是宇宙的实质．物理学家不仅不为认识到有事物不随变换变化而烦恼，而是感到格外的欣喜．不变性是相对论的核心，拓扑学的精髓，量子力学、量子场论甚至一些更高深的理论关切也是关于二次型或二阶微分方程里一些不变的东西．于变换中寻找不变，不是物理学开启的传统，西方人在研究初等的代数方程时已经注重不变量(invariant)的研究了．扯远了，打住．

参考文献

[1] Sternberg S. Group theory and physics. Cambridge University Press，1995

[2] Fourier J B J. Théorie analytique de la chaleur. Paris，1822

[3] Stein E M，Shakarchi R. Fourier analysis. Princeton University Press，2003

[4] Heisenberg W. Zeitschrift für Physik，1927，43：172

[5] 曹则贤．物理，2012，41(2)：119；41(3)：188

[6] Cao Z X. J. Phys.：Cond. Mater.，2001，13：7923

[7] Schrödinger E.‘Nature and the Greeks' and 'Science and Humanism' .Cambridge University Press，1996

[8] Dirac P A M. The relation between mathematics and physics (电子版)

[9] Gallavotti G. Classical Mechanics，in Encyclopedia of mathematical physics，vol. 1. Elsevier，2007；中译本为曹则贤译．科学出版社，2008

[10] Schrödinger E. Ann. Phys.，1926，79：361；79：489；80：437；81：109

[11] 曹则贤．物理，2012，41(9)：610

[12] McDonough W F，Learned J G，Dye S T. Physics Today，2012，(3)：46

[13] Fukuda Y *et al.* Phys. Rev. Lett.，1998，81：1562

[14] Vignale G. The beautiful invisible. Oxford University Press，2011；中译本为曹则贤译．至美无相．中国科技大学出版社，2013

[15] Norman M D，Finn J，Tregenza T. Proc. R. Soc. Lond. B-Biol. Sci.，2001，268：1755

物理新闻和动态

振荡分子驱动马达

欧洲的科学家声称，单个的氢分子可用于推动一个比它自身重得多的物体．他们利用随机共振现象从“噪声”中提取有用的能量．在实验中，研究者使用一台原子力显微镜，其传感器的尖端安装在一个灵活的像弹簧似的悬臂上，显微镜运行时，可以驱动纳米大小的机器，甚至可驱动大得多的设备．

随机共振在复杂系统中，特别是在生物体中，是一种很常见的与能量抽运过程有关的现象，随机共振可以使弱的周期性信号被系统中随机涨落产生的噪声信号加强．这些无所不在的涨落可以来自温度的变化或电子及光子的运动．当噪声信号随机的峰值与周期性信号有规律的峰值重合时，就会发生随机共振．

柏林Freie大学的Jose Ignacio Pascual与他的合作者在从随机噪声中获取能量方面所做的研究工作取得了进展．他们演示了振荡的氢分子的随机运动可以用于移动一个机械悬臂．

研究人员将原子力显微镜传感器的尖端安装在像弹簧一样的由石英制成的悬臂上．然后将单个的氢分子陷获在这尖端和一块铜片之间．并将约0.1V的电压加载在尖端和铜片之间，氢分子在两种位置状态之间随机地转换，驱动着悬臂开始振荡．这意味着最小的氢分子能够驱动一个比它本身大10^{19}倍的振荡器．

研究者认为，可以利用这种原理设计人工分子马达，从噪声环境中提取能量来驱动马达转动．

(树华　编译自*Nanotechweb News*，12 November，2012)