

## 物理学咬文嚼字之五十四

## Action the least

曹则贤

(中国科学院物理研究所 北京 100190)

..to be is to act.

——Leibniz

在所有道路中选择正道.

——佛陀

**摘要** Action, Wirkung 和作用量传达的物理内容有不少的区别。The least-action principle 源自宗教的情怀，有数学和光学的基础，是近代物理学的基本原理。最小能量原理描述没有时间的体系。

## 1 极端的理由

人类大概是种追求极端的生物，走路要走捷径，做工则追求最省料，前者的证据有草坪上践踏出的小道和终南山上隐士们的算计<sup>1)</sup>，后者的证据有不断革命的服装和偷工减料的新建筑。别的生物也遵循类似的最经济原理，如蚂蚁觅食最后会确定一条费力最少的道路，蜂房的三角格子柱状结构是总面积(蜂蜡用量)最小的选择，等等。细想一想，这种习惯或者选择也许有生物学甚至可追溯到热力学层次的取极值的必然。生命是个远离平衡态的高度自组织的体系，其存在的唯一意义，依笔者愚见，就是变着法儿继续存在下去。因此，最大程度地获取支持生存的必要条件、尽可能少地花费生命本身的内容就可以理解了。前者可笼统地归为一个“忙”字，后者可笼统地归结为一个最少花费原理(principle

of least expenditure)——由其得来的一个引理是，懒惰是生命的天性。

懒惰作为人类的天性，常常受到调侃，因为它忽视了生命的继续需要不断地维持存在的条件这一现实。《笑林广记》有一则故事：“有极懒者，卧而不起，家人唤之吃饭，复懒应。良久，度其必饥，乃哀恳之，徐曰：懒吃得。家人曰：不吃便死，如何使得？复摇首慢应道：我亦懒活矣”。另一则关于懒人的故事是这样说的：“从前有个懒人，凡事不伸手，连吃饭都懒得动手。有一次媳妇回娘家，怕懒汉饿着，烙了个圈状的大饼给挂在脖子上。过了几天，媳妇回来，发现懒汉饿死了。大饼靠近嘴巴的部分被咬了几口，其余部分都没动，人家懒得转一下大饼”。这个懒汉的境界也算是极品了。但是，人们很努力地追求懒惰的可能是非常具有正面意义的，各种技术发明无疑都是为了让人们能更轻松、更悠闲。之所

以有了先进的技术后人们反而更忙了，那是因为新技术为我们支撑生命提供了更高层次的可能性，生活因此变得更加有得忙了。

人类是自然的产物，它由自身开始反思自然。物理学中的力学、热学、声学 and 光学，开始于生存的需要以及对自身的理解<sup>2)</sup>。当思考这世间万物存在与运动的根本道理时，人们不满足于笼统地说世界是某个创造者(The Creator)创造的，他们还试图以数学的严格来理解创造者是如何创造的。那么，如何表达创造者所遵循的原则？科学家将之归结为是使某个量最小(大)，这是很长时期以来科学家的习惯了——“在莫比乌斯的任何工作中人们都能看到努力沿着最短的路径、花费最少量的力气、使用最合适的手段以达到目标<sup>1)</sup>”。关于“如何创造”此一思想链的伟大成果，就是贯穿物理学的 least action principle。在谈论这个原理是否该汉译成

1) 唐卢藏用想作官，装模作样地隐居在京城长安附近的终南山上，博得名气，终于得了心愿。后世遂有“终南捷径”的说法。——笔者注

2) 力的概念来自肌肉的感知，光学(optics)的本意是关于视觉的学问。

——笔者注

“最小作用量原理”之前，有必要弄懂 action 到底是什么，而 least action principle 到底想表达什么，它曾经是如何表述(formulated)的以及如何获得今天的地位的，近代它又是如何进一步发展的，等等。

## 2 Action 相关词汇的用法

Action, 相关的词汇包括动词形式 act, 形容词形式的 active, 名词形式的 activity, 都是很典型的日常词汇, 但是它们又都是非常 active 的技术性词汇(technical terms), 有必要认真对待它们的“technical meaning”和“everyday meaning”。Active, 汉译主动的、活泼的, 如 active charcoal (活性炭), active electrode (主动电极。与地电极相对)。Active 用于重要的物理学概念有历史上的 active force。Active force 相当于今天人们说的能量, 如莱布尼兹认为在非弹性碰撞过程中没有什么 active forces 的损失, 只是有点类似于“大钱换成了小零头”而已。在莱布尼兹的哲学随笔中, 与 act 相关的词随处可见, 如“Substance is a being capable of action ...[and] to be is to act (物质是有作用能力的存在...存在就是起作用)”,

“Thus, ‘activity’ was the primitive agent and cause of all ‘effect’ in the universe. Clearly, from the principle of ‘cause equals effect’, the total activity in the universe was conserved (‘activity’ 是宇宙中的原初动因, 一切效应的起因。基于‘结果等于起因’的原则, 宇宙中的总 activity 显然是守恒的)”<sup>[2]</sup>, 等等。若是把 activity 理解为能量, 这里已经有了能量守恒的雏形。Action 以前还被当作力, 如笛卡尔写给 Mersenne 和 Huygens 的一封信中有句云: “the action ...is called the force (vis, virial) by which a weight can be raised, whether the action comes from a man or a spring or a weight, etc”。注意, 这句话里把 action 当作力, 还提到了拉丁语的 vis 和 virial, 不过在现代物理中 virial 也不再是力了, 而是用来表达标量  $\vec{r} \cdot \vec{p}$ 。这个概念在中文物理教科书中没有得到重视, 反映的是人们讲解矢量概念时甚至不知道要顾及矢量乘法的完备性。暗物质存在的推导中就用过这个量 virial。

Act 作为动词(起作用, 有影响, 产生效果)在物理学中的使用, 大约与 operate 同, 如“His (Newton’s) theory assumed that gravitation acts in-

stantaneously, regardless of distance (他(牛顿)的理论假设引力是瞬时起作用的, 与距离无关)”。注意, operate 对应的名词 operator (算符), 以及 generate 对应的 generator (产生子, 生成元), 都有千丝万缕的联系, 学物理者不妨多关注一下。Act 作为动词, 或许还可以有“驱动”的意思, 如“*For the first time a steam engine could now be truly self-acting (蒸汽机第一次变成了真正自驱动的了)*”<sup>[3]</sup>。Action 作为名词, 其所谓的 everyday meaning 与 technical meaning 之间实在看不出有什么明显的界限, 试比较如下两句里的 action。其一、Feynman 说他不仅和艺术家们一样能看到花, 而且“*I can image the cells in there, the complicated actions inside which also have a beauty (我还能想象那里的细胞, 细胞里的复杂行为——它们也有一种美)*”<sup>[4]</sup>。其二是关于群论的一句: *All elements of the form gx for variable g constitute the orbit of x under the action of the group (通过改变g得到的gx形式的所有元素构成x在群作用下的轨迹)*<sup>[5]</sup>。

有 action, 还有 reaction。Reaction, 意思为响应(response), 反动(a movement back), 反作用(opposing ac-

tion, force, influence), 等等。Reaction 在物理学史上一个应用范例是 Dirac 的名句 “I was afraid that getting married would cause a reaction…” (我觉得结婚会引起一些反作用)”, 我猜想他指的是 “意想不到的麻烦”, 不过他还是逃不出 action-reaction 的关联, 后来结婚了。Action-reaction 是西方的生活哲学, 甚至成了习惯用语。法国电影《放牛班的春天》<sup>3)</sup> 里的寄宿学校采取 action-reaction 的原则, 就是一旦认为孩子们的行为(action)不当即采取惩罚措施(reaction)。爱因斯坦在评价他的引力场方程组时曾写到: they avoid the inertial system——that ghost which acts everything but on which things do not react (它们避免了惯性系——那个 act 于任何事物但任何事物都不 react 它的怪物)<sup>6)</sup>, act 和 react 就是一并考虑的。

对于 action 这个词的 technical meaning, 用西文初学物理的人很早就能正确了解, 牛顿的第三定律就是 action-reaction law。但是, 我们用中文学物理的人很不幸, 牛顿的第三定律被表述成了作用力等于反作用力, 力成了这里的关键词。牛顿的第三定律原文如下: Lex III: Actioni contrariam semper et æqualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales et in partes contrarias dirigi。忠实的英文翻译为: Law III: To every action there is always an equal and opposite reaction。这说明这里的 action 是个矢量, 和近代物理里的 action 不是同一个意思。把这个 action 表述成力的, 中国人不是始作俑者, 西文中关于牛顿第三定律早有类似的表述: “When a first

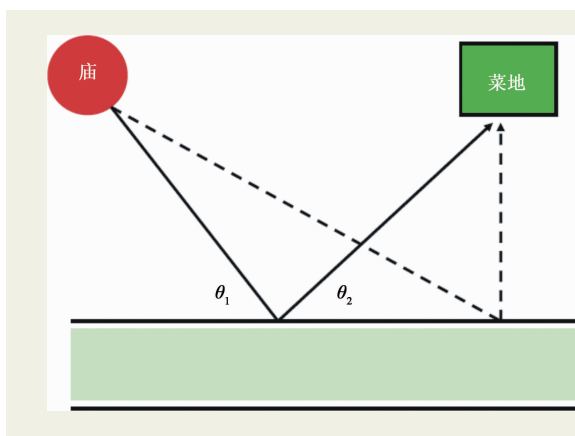


图1 小和尚的难题: 从庙里出发到河边取一担水去浇菜园, 他该走什么样的路径呢?

body exerts a force  $F_1$  on a second body, the second body simultaneously exerts a force  $F_2 = -F_1$  on the first body”, 即把 action 表述成了力。但是, 马赫则把牛顿第二、三定律表述成了 “对于两个物体构成的封闭体系,  $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$  为常量”, 这就剔除了力的概念。再强调一遍, 所谓的物理学里, 是无需力这个概念的!

牛顿的 action-reaction law 深刻地影响了后世的物理学, “Faraday, consciously under the spell of Newton’s third law——for every action there is an equal opposite reaction——held an opinion almost amounting to a conviction (法拉第意识里深受牛顿第三定律的影响, 他把这一观点几乎当成信仰)”。笔者以为, 既然 action 和 reaction 如影随形, 这恰恰说明 interaction 才是物理学的本质, 就没有必要对其进行割裂。马赫早就认识到了这一点, 这是他高明的地方。但是, action 还是用另一种面目(标量)进入了一个统治着物理学的普适原理——least-action principle。

中文物理学把 least-action principle 翻译成最小作用量原理, 把 action 指明是个量, 涉嫌强调过头了。

Action 就是 action, 动作、作用而已, 就算谈论 least-action principle 时也并不总是强调量, 这一点应该受到足够的重视。Action 笼统地被当作 “作用” 的用法, 物理学中到处都是。原来的原子论、机械论把所有的物理作用还原为碰撞, 及至牛顿给出了引力的表述, 指出物体间的引力是超越距离的动作 (action-at-a-distance), 此即所谓的 “上帝拨动了世界, 但不弄脏他的手”。Action-at-a-distance, 类似武侠中的隔空打穴, 是无需介质的。后来的 Maxwell 电磁学理论否定了电荷间的 direct action-at-a-distance, 它用场填充了电荷之间的 space<sup>4)</sup>, 是场传递了电荷间的 interaction<sup>7)</sup>。

在量子力学中, 据说一对纠缠的粒子(entangled particles)是用同一个波函数描述的。它们可以离得很远, 但其数学描述意味着对其一的测量可以立马(instantaneously)影响到另一个, 即便它们之间的距离超出任何经典作用以光速可以到达的地方。这就是说, 这两个粒子之间存在某种关联, 其影响比光速还快, 爱因斯坦称之为 spooky-action-at-a-distance (鬼魅般的超距作用)。爱因斯坦和两位同事在

3) 原名为 Les Choristes, 合唱队员。——笔者注

4) 把 space 简单地翻译成空间是很不负责任的。试理解 empty space 和 spacer 的意思。——笔者注

1935年的一篇文章中指出这违背狭义相对论，它意味着量子力学至少是不完备的，这就是著名的EPR paradox。

Active 也与 principle 连用过，有 active principle 的说法。例句如“Planet will cease orbiting (due to friction) if there were no active principle to bring about a ‘reformation’ of the heavenly order (如果没有 active principle 带来天体秩序的变革，行星将因摩擦而停止运行)”。笔者未在中文物理书中见到过对这个原理的讨论，所以不知道如何翻译，似乎指的是牛顿第三定律：“In other words, Newton is giving ‘action’ and ‘reaction’ a broad meaning beyond just the accelerative force implied in his Second Law of motion. This broader conception of ‘active principles’ coupled with the suggested interconvertibility between light and bodies looks forward in some respects to our modern physics (对 active principle 的宽泛的见解，配以光和物体可以互相转换的观念，在某些方面前瞻了我们的近代物理)”<sup>[1]</sup>。

强调一点，action 在德语里用的是 Wirkung，普朗克常数  $\hbar$  就称为 Plancksche Wirkungsquantum，对应的

动词是 wirken (起作用，effect, cause)。Wirkung 是动名词，有结果、效果的意思，德语短语 Wirkung der Aktion (作用的效果)里的 Wirkung 和 Aktion 都对英文的 action。德国人教物理，也要强调 Wirkung 不是简单的原因—结果里的结果。此外，在物理学史上，Euler 用过物理量 Wirksamkeit (effort, 作用效果，字面上是自形容词 wirksam 变化而来的名词)，就是  $mvv$ 。从  $mvv$  到  $\frac{1}{2}mv^2$ ，物理学还有一段不短的路要走。

### 3 物理中的经济原则

为了做成某件事情去寻找最省力的方法，达到 least expenditure of “action” (最节省动作)的境界，无疑是自然而然的事。设想有个小和尚要从庙里出发到河边，挑上一担水到菜园浇菜，考虑空担( $m$ )和重担( $\lambda m$ )的差别，他该到哪个点取水才能最省功夫(力×距离)呢(图1)? 一点微积分的运算会得出结果：当  $\cos \theta_1 / \cos \theta_2 = \lambda$  时，最省功夫。注意，当  $\lambda = 1$ ，即水没有重量的情况下， $\theta_1 = \theta_2$ 。这么个日常的问题，会给出光学的反射和折射定律。在光学中，若光的传播遵

循费马最少时间原理 (principle of least time)，则折射满足 Snell’s law (图2)，有  $\sin \theta_1 / \sin \theta_2 = n$ ，其中  $n$  为介质的相对折射率。如果考虑的是界面的反射问题，路径都在同一种介质中， $n=1$ ，则有  $\theta_1 = \theta_2$ ，即反射定律。反射是折射的特例。

与费马的最少时间原理差不多同时期，有伽利略研究落体时提出的最短下降时间(minimum descent time)问题(图3)：物体自高处一点向旁边低处的一点滑落，那么沿着什么样的轨迹下降时间最短？1696年，Johann Bernoulli 把此问题，即所谓的 brachistochrone (希腊语最短时间) problem，提交给世界的顶尖数学家求解<sup>[8]</sup>。此问题的解令人大为惊讶：最速降线竟然是倒置的摆线——将一个圆沿着平面无滑动滚动，其上任意一点的轨迹都是摆线(cycloid)，方程为  $x = R(\theta - \sin \theta)$ ， $y = R(1 - \cos \theta)$ 。你现在知道滑板比赛的轨道该是什么样子的了吧。

### 4 宗教情怀与科学表述

在寻找关于自然的基本原理时，西方人的宗教情怀一直在起着作用。据说，莱布尼兹认为在上帝创造的所

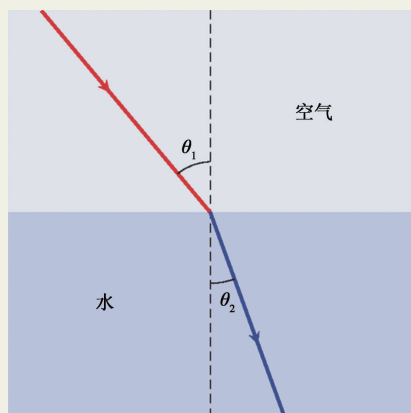


图2 光在不同介质界面上的折射满足费马的最小时间原理

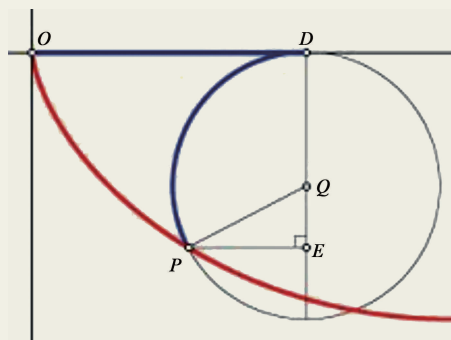


图3 最速下降问题。从一点O向旁边一点P最速下降的路径是经过O点和P点的摆线



图4 Least action principle 的三位关键人物莫佩尔蒂(Maupertuis, 1698—1759), 欧拉(Euler, 1707—1783) 和拉格朗日(Lagrange, 1736—1813)

有世界中, 我们所处的这个世界是最美好的 (He (Leibnitz) concluded that of all the worlds God could have created, the one we live in is “the best of all possible”), 不知这是否可算是多世界理论和路径积分的哲学起源? 借着小说 *Candide* 中的人物 Pangloss 博士之口, 伏尔泰说: 已经证明, 事情不可能是有别于其现状的样子, 因为每一事物被创造都是有目的的, 每一种事物都是为了最好的目的创造的。这种宗教的情怀, 后来找到了同自然科学结合的途径, 其推动者为法国人莫佩尔蒂 (Pierre-Louis Moreau de Maupertuis, 1698—1759)。莫佩尔蒂, 曾任法国科学院的主任(次年入选 la Académie française)和普鲁士科学院的主席, 和欧拉一起共过事。莫佩尔蒂是个博学的天才, 他曾探险到拉普兰以确定地球的形状, 甚至被认为是 genetics 的先驱, 物竞天择的理论也是他最先提出的<sup>5)</sup>。

1741年, 莫佩尔蒂在一篇名为 *Loi du repos des corps* (物体静止的定律) 的文章中注意到: 一个静止的系统, 会到达这样的位置, 其任何变化会造成某个量之最小的变化, 这个量

可归为 action。这即是说, 从静止开始的运动, 管它是什么意思, 是最小的! 这种把发生的物理看成是所有未发生的背景上的极值, 笔者以为简直是天才的神来之笔。这 least-action principle 此时是关于力学定律的一个形而上学的原则。

“Least action”听起来像是个经济原则: 尽可能地少花费。一个普适的“最节省花费的原理”无疑地会展示创造世界时的智慧, 在莫佩尔蒂看来, 这是存在一个无限智慧的创造者之最强有力的说明。莫佩尔蒂在 1750 年出版的 *Essai de cosmologie* (宇宙学文集) 中诠释了 this 思想。由此, 莫佩尔蒂把这个原理看成他的物理学成就的顶峰, 且还是他最重要的哲学成就, 因为它给出了上帝存在的不可辩驳的证据。莫佩尔蒂用了二十年的功夫发展了这个原理。他想到 action 应该为物体的质量、走过的距离和速度的乘积。这依然是运动定律 (Loi du mouvement)。天才的洞见<sup>5)</sup> 让他意识到了 least-action principle, 但是因为缺乏智识或者严谨性, 结果他没能像拉格朗日那样给出该原理的严格的数学表达。

质量乘上速度乘上距离, 这(至少量纲上)等于动能的时间积分。为了使最小作用量原理定量化, 两位大数学家欧拉和拉格朗日作出了巨大的贡献 (图4)。后来的力学发展为任意一段时刻内的运动引入了 action  $S$ , 是  $T-V$  这一拉格朗日量关于时间的积分。在现代的理论力学教程中,  $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}; t) dt$ , 其中  $t_1, t_2$  是固定的<sup>6)</sup>。作用量最小的路径, 应满足方程  $\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$ , 此即著名的 Euler—Lagrange 方程。

类似的求最短路径的问题都有对应的 Euler—Lagrange 方程, 如测地线问题 (geodesic)。例如, 设黎曼流形  $M$  上的度规张量为  $g$ , 沿一条连续可微的曲线  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  的长度为  $L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt$ , 则在流形上的两点间的距离定义为所有连接曲线长度的下确界 (infimum。应该是 least 的另一个说法)。有了这个定义, 黎曼流形上的局域最短距离可通过变分法求得。引入如下的 action 或者能量泛函,  $E(\gamma) = \frac{1}{2} \int g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) dt$ , 由 Euler—Schwarz 不等式  $L^2 \leq 2(b-a)E(\gamma)$ , 其中

5) 说这个见解是天才的, 是因为它把距离同速度, 即相空间的不同轴, 用乘积的方式联系在一起了。Action 的一般表示, 有关于时间积分的内容, 因此有必要引入扩展相空间。物理学任何概念都有来历, 信夫? ——笔者注

6) 高级教程里, 作用量在  $(x_1, x_2, x_3; ic t)$  空间中的形式为  $S = \int L(u, u_n; \mu) d\mu$ 。

——笔者注

的等式在  $|\dot{\gamma}(t)|$  为常数时成立，可最小化泛函  $E$ 。关于泛函  $E$  的运动方程或曰 Euler—Lagrange 方程就是测地线方程，形式为  $\frac{d^2 x^\lambda}{dt^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = 0$ ，其中  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  是度规的 Christoffel 符号。熟悉广义相对论的读者可能已经注意到，这个方程就是爱因斯坦引力方程组的第二式。

作用量最小的路径的算法，为变分法 (calculus of variation)，是对 Newton 和 Leibniz 的微积分的发展<sup>[10-12]</sup>。最小作用量的路径满足的方程为 Euler—Lagrange 方程。但是，从这个方程得到的是静态的作用量 (stationary action)，按照欧拉的说法，它可能最小，也时不时 (zuweilen) 是最大，从这个意义上来说，这个原理应该表述为静态作用原理 (the stationary action principle)。静态作用原理，想想也是，发生的就该不该发生来说，是所有不发生之背景上的静态。是否可以说自然选择的是作为作用泛函之 stationary point 的路径呢？哦，这可是你的事情，也许就没有那么个路径，有也未必是唯一的。退一步说，就算这个静态作用原理是对的，也不是所有的运动方程都可以通过构造拉格朗日量就能获得的<sup>[13]</sup>。

前面获得 Euler—Lagrange 方程时，假设路径的端点是固定的。如果路径的两端也是可变的，则该变分问题会变得复杂起来。哈密顿 (Rowan Hamilton) 对这个问题进行了深入的研究，很大程度上把力学和光学统一了起来<sup>[14]</sup>。知道薛定谔、狄拉克以及后来的费曼这些人明白这些过程和此



图5 费曼在授课 (从板书内容看应是在讲述量子力学)

中的学问，他们对量子力学的贡献，以及与他者不同的贡献方式，就变得可以理解了。

## 5 对 least-action principle 的评价

最小作用原理在物理学定律中享有最崇高的地位，哈密顿认为 “it is the ‘highest and most general axiom’ (它是最高最普遍的公理)”<sup>[14]</sup>。亥尔姆霍兹 (Hermann von Helmholtz) 相信最小作用原理可能是适用于自然界所有过程的普适的定律。拉莫 (Joseph Larmor) 认为不同部分的物理可以用这同一把伞罩着。普朗克认为最小作用量原理有目的论的特点，它为因果律引入了新思想：伴随着起因 (causa efficiens) 还要考虑结局 (causa finalis)，结局是可以推导出指向该结局之过程的前提。普朗克特别指出：“最小作用量原理……似乎统治着自然界中所有可逆的过程”。不过，或许正如玻恩的观点，普适的公式具有极值原理的形式，不是自然界有这么个愿望或

者目的或者为了节约，而是因为我们除了把规律的一个复杂结构浓缩成一个简短的表示外，别无它法<sup>[13]</sup>。

## 6 最少作用原理的近代发展

物理学是一条思想的河流。任何还有生命力的思想，都会时不时地得到新的发展。对原子轨道的推广了的作用量 (Generalized action) 让 Bohr 弄出了量子化条件  $\oint p dq = n\hbar$ ，这是旧量子力学的核心。运动的微分方程和最小作用原理之间的等价性包含在哈密顿原理中：任何物理体系的微分方程都可以重新表述为等价的积分方程。费曼想必看到了这一点。费曼在其学位论文中给出了量子力学的路径积分表示：一个物理系统同时循着所有的路径演化，每条路径对应的几率幅由路径积分<sup>7)</sup> 而来的 action  $A$  给出，即  $\propto e^{iA/\hbar}$ ，几率最大的那条路径对应经典的路径<sup>[15,16]</sup>。笔者觉得，作用量是比能量更基本的东西，似乎不是可测量的。若用  $d(ict)$  的积分形式，本身就是复数形式的，则费曼积分形式的量子力学就更合理了。费曼的工作，深

7) 苏联作家普里什文的一篇短文《林中小溪》，或许有助于理解路径积分的精神，照录如下：小溪怎么样了呢？一半溪水另觅路径流向一边，另一半溪水流向另一边。也许是在为自己的“早晚”这一信念而进行的搏斗中，溪水分道扬镳了：一部分水说，这一条路会早一点儿到达目的地，另一部

分水则认为另一边是近路。于是它们分开了，绕了一个大弯子，彼此之间形成了一个孤岛，然后又重新兴奋地汇合到一起，终于明白：对于水来说，没有不同的道路，所有道路早晚都一定会把它带到大洋。

——笔者注

受狄拉克的影响。关于费曼是如何受到狄拉克影响的，有如下描述：当费曼还是个研究生的时候他就研究了狄拉克的一篇“little paper”，讲述如何将最小作用量原理应用于量子力学，可以构造出完全不同于薛定谔或者海森堡版本的量子力学<sup>[17]</sup>。有趣的是，狄拉克本人对这个问题似乎不热衷。

费曼的量子力学表述，可以理解为对历史求和(sum-over-histories)。按费曼的观点，在微观层次上，所有的路径都要被经历的。如果某个经典现象是大量的微观量子现象的极限，则经典现象的定律必是某个特殊的东西。也就是说，存在某个量，对任意的路径(history，不是path)它是可以计算的，但它在经典极限路径上应该取极值(图5)。这个量，你管它叫action也好，叫“上帝的愉悦(God's pleasure)”也罢<sup>[18]</sup>。

## 7 瞬间的变种： Least energy principle

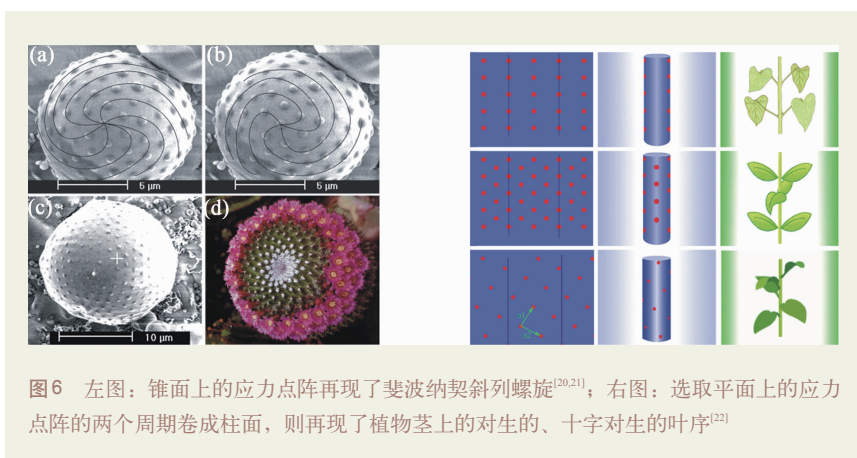


图6 左图：锥面上的应力点阵再现了斐波纳契斜列螺旋<sup>[20,21]</sup>，右图：选取平面上的应力点阵的两个周期卷成柱面，则再现了植物茎上的对生的、十字对生的叶序<sup>[22]</sup>

有些问题，正如佛门的教诲，只关切当下(the current moment)，因此是无法引入历史的。实际上，笔者愚见，物理学是患了严重的分裂症的，可分为热力学和非热力学的各门力学。就组织形式而言，在热力学中变量对是以关于能量共轭的形式组织的，而在经典力学、量子力学中变量对是以关于action共轭的形式组织的<sup>[19]</sup>。平衡态热力学中没有时间，非平衡态热力学与时间的关系还是一笔糊涂账，未见清晰完整的理论。对于只关切某个时刻的体系，没

有历史和作为历史积分的action，决定体系形态的可能就是最小能量原理了，当然这能量可能是各种不同名目的能量。例如，著名的Thomson问题<sup>8)</sup>其实就是关于导体球面上 $n$ 个电荷的分布问题，其平衡态的构型可表述为满足库仑势能之和最小，结果大体上可看作是带内禀缺陷的三角格子。如果在一个材料体系中引入足够大的应力，则材料会发生屈曲(buckle)，即产生皱纹。这种机理应用于柔性衬底+略显刚性薄层的体系上，则依据体系的拓朴的不同，可以再现从Fibonacci斜列螺旋到对生、十字对生状的花叶序<sup>[20-22]</sup>(图6)。对于椭球状的体系，可以看到，在形状因子、相对皮厚和应力水平三参数空间中的特定范围上，体系会表现出特定的屈曲模式，其中一些再现了自然界中瓜果的脊状外观(ridges)<sup>[23]</sup>。这暗示瓜果的外形某种意义上是力学的而非基因的结果<sup>[23]</sup>。有兴趣的读者，可以参看我们的系列论文<sup>[20-23]</sup>。这类问题，可表述为满足最小弹性能原理的结果，乃最小能量原理之烂觞。你可能已经体会到了，如果你要通过绷紧脸皮来消除皱纹，你抗拒的不是皱纹，而是最小弹性能原理——你输定了。



图7 椭球面上在形状因子、相对皮厚和应力水平三参数的不同domain上的应力花样，再现了瓜果的脊状外观(ridges)<sup>[23]</sup>

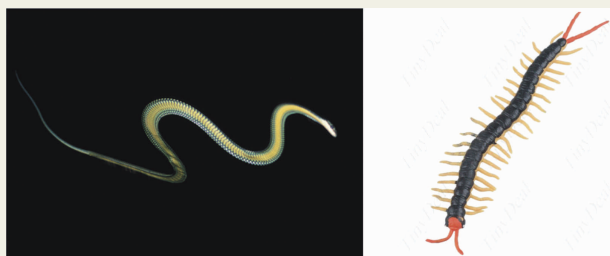


图8 无脚的蛇和多足的蜈蚣，甚至号称千足的马陆，真的都是同一个关于运动的普适的经济学原理的结果吗？

8) 此问题1904年提出，是早期的原子核模型之一。——笔者注



图9 捕食者总是根据猎物的位置调整自己的路线，算是对最小作用(最短路径)原理的践行。如考虑进猎物根据对捕食者行为的预期而引入的调整，这个体系的动力学用什么原理描述呢？

## 8 结语

把问题表述为某个量，action、energy 或者别的什么，最小化的问题，看起来是行之有效的哲学。自然，对于这种表述，没有更深层面的支持。问题是，考虑的问题多了，对于这种“放之四海而皆准”的原理，也难免感到困惑。世界的设计真的就遵循最经济的原理吗？就长脚问题的哲学来说，一条腿都没有的蛇和多足的蜈蚣甚至西文中被称为千足 (millipede) 的马陆 (图8)，真的都是同一个关于运动的普适的经济学原理的结果吗？这还真有点令人含糊。

最低能量原理和最小作用量原理之区别在于是否有历史观。看历史观的有无，似乎也能理解世界上不同地方的社会现象。在某些地方，人们信奉的是利益最大化原理，即当前时刻能捞多少捞多少，能爬多高爬多高，

哪管它身后洪水滔天。倘若如中国人那般还在乎“赢得生前身后名”，对个人行为的判断采用时间积分的思路，即加一点历史的考量，或许那里一些能量极大的人的 action 会略有忌惮，则这无疑当地不幸与他们同时代者的大幸。

## 后记

1、物理学是自然哲学，因此哲学的品质从未曾丢弃过。费马光学定律、最小作用原理就是一类哲学性的命题，是真正的 first-principles。你认可就认可，证明却是无从谈起的。当然，人们对于未经证明的东西心里总是不踏实，却不知证明的前提本身总是引入继续证明的需求。有个笑话(未知其作者也谁)也许有助于对问题的理解，兹录于此。

老师：“两点之间直线最短”这

个公理是不用证明的，大家都承认，放之四海而皆准。

一同学：那可不可以证明呢？

老师：你要证明也未尝不可。你在远处放一根骨头，然后把狗放开，它肯定是笔直地跑到骨头跟前，不会拐弯不会绕道的(图9)。狗都知道的道理，还有什么需要证明的呢？

2、2007年中秋，与单位几位同事谈起最小作用原理，谓几位上大学、留学读博士、做个试图研究的研究员或者努力教书的教授，乃人生的最佳堕落路线。此是来自现实的认真嘲讽。其实，人生是一场起点和终点都固定了的旅行，其轨迹难道不是依据最大(小)某某量的原理规范的？人生万象，大约只是各人的价值观兼或所受的约束条件不同罢了。如何获得最大或者最小量，首要的问题是如何赋予不同的路径以作用量的问题，即价值观问题，其次才是道路的选择问题。

3、求最佳值问题(programming)是个挑战智力的活。有时候，人们不得不求助于大数的随机事件的结果。据说某地建立了新园区，事先未规划穿过草坪连接不同建筑的小路，而是任由人们自由穿越。这便应了鲁迅先生在《故乡》里所言：“其实世上本没有路，走的人多了，也便成了路。”那自由选择的路就是连接各个建筑间最简捷的道路。这是对最小功夫原理的现实诠释。所谓的蚁群算法，应该出于同样的考虑。

4、常常看到一个美学原则，认为对称是美的。或许对称性与美的关联恰恰在于人们欣赏和记住对称的事物时需要付出的努力最少吧。一张对称光滑的脸和一张充满多层次结构的脸，把握后者显然太费力。





## 微弱信号检测 半个世纪的骄傲

7265 型数字锁相放大器  
全球通用的多功能仪器



### 数字锁相放大器 Model 7265

- 0.001Hz至250kHz频率范围
- 直接数字解调
- 10 $\mu$ s至100ks时间常数
- 谐波测量达65536F
- 独有的双参考信号、双谐波和虚拟参考功能
- 频谱显示功能
- 瞬态记录仪功能
- GPIB和RS232接口

**其他产品：**前置放大器、光学斩波器、  
BOXCAR平均器、数字信号平均器、  
TOF-MS相关时间转换器、甄别器

生产商：阿美特克商贸(上海)有限公司北京分公司  
电话：010-85262111-10  
传真：010-85262141-10  
地址：北京朝阳区酒仙桥路10号京东方大厦  
二层西侧  
邮编：100015  
网址：www.signalrecovery.com.cn

中国代理商：北京三尼阳光科技发展有限公司  
电话：010-65202180/81  
传真：010-65202182  
地址：北京朝阳区东四环中路41号嘉泰国际  
1209-1210室  
邮编：100025  
网址：www.sunnytek.net



## 参考文献

- [1] Fauvel J, Wilson R, Flood R (Eds.). Möbius and His Band: Mathematics and Astronomy in Nineteenth-Century Germany. Oxford University Press, 1993. 原文为：Everywhere in Möbius' s work one can see his endeavor to reach his goals along the shortest path, with the smallest possible amount of machinery and using the most appropriate means
- [2] Parkinson G H R (Ed.).Gottfried Wilhelm Leibniz. Philosophical Writings.London: Dent, 1973.pp41—42
- [3] Coopersmith J. Energy-the subtle concept.Oxford University Press, 2010
- [4] Feynman R. The pleasure of finding things out. Basic Books, 2005
- [5] Manin Y I. Mathematics as Metaphor. American Mathematical Society, 2007
- [6] Cao T Y. Conceptual developments of 20<sup>th</sup> century field theory. Cambridge University Press,1997.p81
- [7] Dyson F J. Why is Maxwell' s theory so hard to understand (1999 年的报告)
- [8] Nahin P J. When least is best. Princeton University Press, 2004
- [9] Beeson D. Maupertuis: an intellectual biography. Oxford University Press,1992
- [10] Hildebrandt S, Tromba A. Mathématiques et formes optimales. Berlin :Pour la Science,1986. in French
- [11] Lanczos C. The Variational Principles of Mechanics. University of Toronto Press,1970
- [12] Yourgrau W, Mandelstam S. Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory (3rd edition), Pitman, 1968
- [13] Kragh H S. Dirac: a scientific biography. Cambridge University Press ,1990
- [14] Hankins T L. Sir William Rowan Hamilton. London: the Johns Hopkins University Press, 1980.pp183—205
- [15] Feynman R.The principle of least action in quantum mechanics. Princeton University Press,1942
- [16] Brown L M. Feynman' s Thesis—a new approach to quantum theory. World Scientific, 2005
- [17] Farmelo G.The Strangest Man: The Hidden Life of Paul Dirac, Mystic of the Atom. Basic Books, 2011
- [18] Freund P. A Passion for Discoveries. World Scientific, 2007.p32
- [19] 曹则贤.热力学和量子力学的系列讲座ppt
- [20] Li C R, Cao Z X. Science, 2005, 309: 909
- [21] Li C R, Ji A L, Cao Z X. Appl. Phys. Lett., 2007, 90:164102
- [22] 李超荣, 纪爱玲, 曹则贤.树干上的叶子.物理, 2006,35(6)(封面)
- [23] Yin J, Cao Z X, Li C R *et al.* PNAS, 2008, 105: 19132