混沌研究五十年

(北京师范大学　郑志刚，胡岗 编译自 Adilson E. Motter，David K. Campbell. *Physics Today*，2013，(5)：27，原文详见http://ptonline.aip.org)

经典物理学告诉我们：给定系统的初始状态，它未来所有状态都可解出。拉普拉斯精辟地将这一认识表述为“智者只要能洞悉支配自然的所有的力及其构件状况，并且他的智慧足以对所有这些数据加以分析，那么对他而言一切没有不确定性，未来如同过去一样历历在目”。但现实中人们不可能完全精确确定初始条件。多年来人们默认：从近似的初始信息可以得到近似正确的终态结果。

1963年麻省理工学院气象学家Lorenz发表的论文及其他学者的研究成果显示，尽管上述确定性的预言在直观上似乎很有道理，但实际上并不正确。对绝大多数系统而言，初始状态中一个小的不精确性会导致系统结果的根本不同，这标志着确定论的终结。

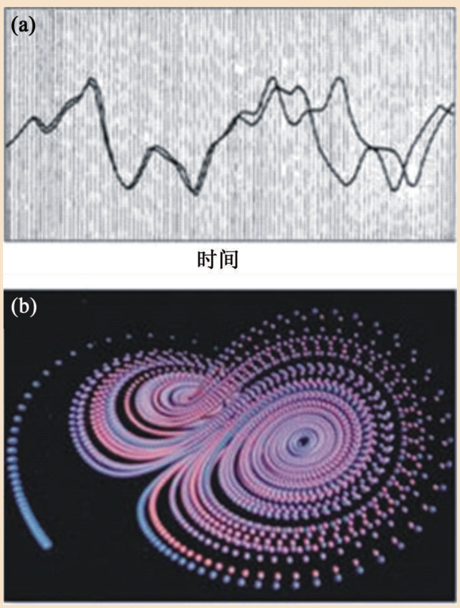

图1　(a) Lorenz从差别细微的两个初始条件演化得到的时间序列原始数据；(b) Lorenz吸引子。Lorenz方程为：$\mathrm{d}X/\mathrm{d}t = \sigma(-X+Y)$, $\mathrm{d}Y/\mathrm{d}t = rX - Y - XZ$，$\mathrm{d}Z/\mathrm{d}t = -bZ + XY$，其中$X$代表对流运动强度，$Y$正比于上升与下降流的温差，$Z$刻画对垂直方向温度分布的线性偏离，$\sigma$为Prandtl数，$b$为几何参数，$r$为瑞利数

偶遇——耗散系统的混沌

二十世纪中期，气象学家中盛行采用线性计算的方法进行天气预报。但也有气象学派认为，模拟流体动力学方程可以更准确地预测天气。当时在麻省理工学院工作的气象学家Lorenz购买了他的第一台计算机，并决定用它来比较两种算法。流体方程用12个变量的常微分方程描述，Lorenz在比较中寻找非周期解，期待这类解对线性方程处理有更大挑战。他的确验证了线性方法在这种非周期情况下预报结果不成功。

故事并未结束。Lorenz继续着他对非周期运动的好奇心。有一次，为了更详细地观察发生的现象，他停下计算机，打印下原有的计算数据，再重新开机以重复一段已有的计算过程。其间离开一个小时咖啡的功夫再回到机房时，计算机已算出了两个月的气象结果，而新的计算结果与原有结果相比已面目全非。仔细检查后Lorenz发现，新旧数据的离异不是在某一时刻突然发生的。偏差大约以每4个气象日增加一倍的方式发散，直至第2个月中两类数据变得毫无关联。这个现象告诉他，是两次计算舍去尾数的不同而偏差又被持续放大导致了问题。于是Lorenz发现了模型中存在运动轨道对初始条件的敏感性行为，而这正是混沌的精髓所在。图1(a)是他发现这一敏感性现象的原始数据。

Lorenz进一步将系统简化为仅含3个变量的非线性常微分方程，并发现类似结果。他在1963年发表了题为《确定性非周期流》一文，文中得到了如图1(b)的后来被无数次重现的混沌轨道。Lorenz模型是耗散系统，具有相空间体积收缩的特点，不同轨道会演化到相空间中确定的集合，并不再离开，这样的集合被称为吸引子。图1 (b)的混沌吸引子被称为Lorenz吸引子，而产生它的Lorenz方程是耗散系统混沌的典型代表。

轨道展室中的怪物——哈密顿系统的混沌

对混沌现象的广泛研究始于1963年Lorenz的工作。但甚至Lorenz本人似乎都没有意识到与混沌相关的若干概念和行为的研究早在十九世纪末就已具端倪，其开始于Poincare在天体力学中对三体问题的研究。这类力学问题可以用相空间中耦合的一阶常微分方程描述，相变量包括坐标和动量。当时盛行的认识是，这类n自由度系统在$2n$维相空间的轨道行为由其n个守恒量所制约，从不同初始条件出发系统轨道可以是稳定点(0维)，周期态(1维)，m维环面准周期态($2\le m\le n$)。然而Poincare所计算的三体问题却不属于上述轨道的任何一种。他

发现轨道从不自相交，但会以复杂的方式无数次与以往轨道的任意小的邻域相交。他写到“人们一定会被这种难以描述的复杂形态而震惊”，同时他发现“小的初始条件的偏差会导致最终结果的重大区别……从而预言变得不可能”。这正是后来Lorenz在气象模拟中发现的初值敏感性。

Lorenz研究的是耗散系统的混沌，而Poincare研究的是相体积守恒的哈密顿保守系统，不存在吸引子概念。为了理解哈密顿系统的混沌，考虑一个n自由度可积哈密顿系统。其n个独立的不变积分使运动限制在n维环面上，对应于n个独立的周期运动模式。一个一般性的哈密顿微扰会破坏模频率比为有理数的共振环面，环面被破坏的轨道会在$2n$维相空间中运行，成为混沌轨道。另一些频率比为无理数的轨道会在小的范畴内保存下来。这些小范围的环面中又会因为上面所说的机制形成更小尺度上的混沌轨道和更小尺度的准周期环面，如此重复会形成混沌轨道和准周期环面轨道在无穷层次上层层镶嵌的自相似复杂结构，如图2所示。这正是Poincare所指的使人们震惊的复杂形态。Kolmogorov—Arnold—Moser理论证实了非共振准周期环面在小微扰下的存在，并且其所占部分随微扰增强而减少。这些似乎病态的行为在实验中也被观察到，但早期被看作是在“陈列室中展示的怪物”。

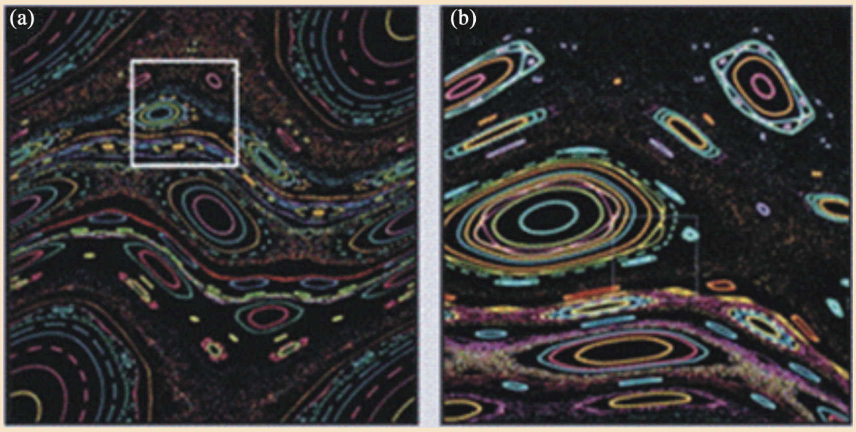

图2 (a) 周期驱动转子相空间轨迹的频闪映射，闭合环对应于周期和准周期运动区域，散点对应于混沌运动；(b) 图(a)中白框的放大，显示出自相似性

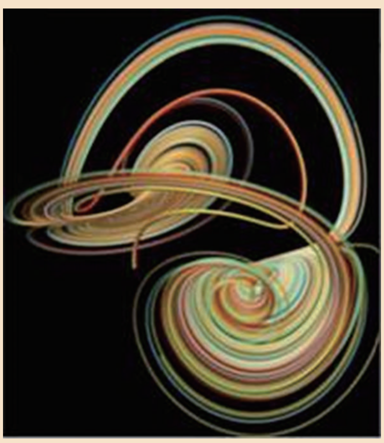
图3 数值模拟的地磁场磁极方向在天文学时间尺度下无规则的翻转

蝴蝶效应与分形结构

系统运动对初值变化的敏感性是确定性混沌最根本的性质。这种敏感性及无处不在的微扰使得混沌轨道的长期行为是不可预言或随机的，这与掷骰子没有任何差别。Lorenz意识到，如果大气表现出其模型的行为，气象的长期预报就是不可能的。在1972年的会议上，Lorenz发表了题为《预见性：巴西的蝴蝶扇动翅膀会引发德克萨斯州的龙卷风吗?》的演讲，用蝴蝶隐喻一个看似不起眼的微小扰动，它所引发混沌系统长期趋势的重大变化的现象称为蝴蝶效应。图1(b)的Lorenz吸引子形似蝴蝶的双环结构也是蝴蝶故事的一个形象来源。

初值敏感性是混沌吸引子的动力学特征，而分形结构则是在相空间中混沌吸引子的典型几何特征。相空间中的一个小流块在混沌运动中会由于初值敏感性在某些方向随时间指数拉伸，由于耗散性又在其他方向上指数收缩形成细条结构。运动的有界性导致细条流块的折叠，这些类似面包师揉面的操作无限次反复就会导致吸引子的自相似分形结构。如图1(b)所示的吸引子的维数为2.06。

结束语

与相对论和量子力学等物理学革命性突破不同，混沌并不是针对任何特定物理现象的理论。它发现的现象、提供的概念和方法涉及并推动了几乎所有科学领域的变化。当前混沌的基础理论已融入物理和应用数学的教程。但人们仍然以极大兴趣研究混沌在包括应用物理、工程、生理、计算科学及金融学等在内的各个领域的表现和应用。例如在天文学时间尺度下地磁场磁极方向不规律的翻转。这一传统问题近年来被类似Lorenz方程的简单混沌模型所描述(见图3)。从混沌研究中获益最多的领域莫过于流体力学。湍流是两百年来流体力学持续关注的重大问题，流体表现出的时空混沌是混沌与湍流之间的理想桥梁。(1963年Lorenz论文的最初题目就是《确定性湍流》。)混沌在各个领域的应用不胜枚举，有关混沌的诸多基本问题还未解决。

混沌研究还有广阔和深入的发展空间。而Lorenz本人因为在发现确定性混沌上作出伟大的贡献而载入科学史册。他的发现深刻地影响了基础科学的广大领域，是自牛顿以来对自然观最激动人心的认识变革之一。