

物理学咬文嚼字之五十六

印迹与轨道

曹则贤

(中国科学院物理研究所 北京 100190)

I leave no trace of wings in the air,
but I am glad I have had my flight.

——R. Tagore in *Fireflies*¹⁾

科学语言是一种处于矛盾下的自然语言。

——Roald Hoffmann²⁾

摘要 Trace (track, trail), orbit, trajectory, locus 是常见的数学、物理概念，在汉语中都被随意地翻译成(轨)迹、轨道，难免会带来一些误解。轨道之有无，也是物理学曾为之纠结过的问题。

人行大地之上，许多时候会留下印迹(trace)。当然，不只是人，其它运动的对象也会留下形态各异的痕迹，因此我们的语言中关于印迹的词汇非常丰富。曹操《度关山》开头三句“天地间，人为贵。立君牧民，为之轨则。车辙马迹，经纬四极”中的轨、辙、迹、经、纬等，都与印迹有关。印迹是一种记录，含有时间的内容，当然还有许多其它的内容。小时候读过一则故事，说一个乡间的

奇人能够根据脚印判断出那人的轻重、高矮、胖瘦，甚至形容姿态，因而被请去断案。其实，从脚印判断留下脚印者的体态特征，古时的猎人都懂得这个道理。

脚印是由力的施加者和承载物的性能共同决定的。留在硬土地上的印迹同留在泥巴地上的印迹就不同。固化在粘土里的动物足迹能为我们提供几千万年前地球的信息。而因为水是牛顿流体，其上和其中的痕迹很快就会平复，这就是你不能从二十里外追踪一只小船的道理。在更加稀薄的空中，飞过的鸟儿似乎没有留下什么痕迹。那么，在更高的虚无缥缈中经过的日月星辰，也曾留下过痕迹吗？

要认识到天上的星辰也是有轨迹的，所需要的可能不止是诗人般的敏感心灵，它还需要深刻的洞察力和领悟力。2600年前，泰勒斯(Thales of Miletus)意识到世界是可以理解的，这个想法让人类走出了愚昧。不知道什么时候有人认识到天上的星星竟然也是有轨迹的，人类的认识能力又往前迈了一大步。今天，凭借连续曝光技术，人们容易将天体的轨迹纪录下来，从而看到了一条明显的径迹。图1中的照片是把不同时刻太阳的位置 $R(t)$, $t=t_1, t_2, \dots$ ，转化成2D图像中的位置 (x_i, y_i) , $i=1, 2, \dots$ 。实际上，数学上的曲线就是这么定义的。这个在今天看来唾手而得的图像，对于古代科学家来说可是了不起的智力突破。第谷留下大量的观测数据(猜想应该是关于火星、木星和金星的，



图1 连续摄影获得的太阳从天空划过的轨迹。认识到物体运动的轨迹是可研究的实在，是人类认识史上的一次飞跃

1) 印度诗人泰戈尔诗集《萤火虫》中的一句。我喜欢把它翻译成“天空中未留下振翅的痕迹，但我确曾飞过”。——笔者注

2) 1981年度诺贝尔化学奖得主，1988年度Pergamon文学奖得主。此句具体出处不详，希望日后有机会确认。——笔者注

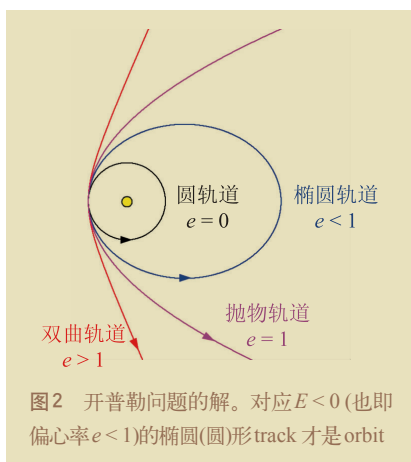


图2 开普勒问题的解。对应 $E < 0$ (也即偏心率 $e < 1$)的椭圆(圆)形track才是orbit

想一想,为什么?),开普勒将立足点从地球移到太阳,行星轨道的椭圆形就跃然纸上了。等到牛顿给出万有引力作为行星轨道的解释,真正意义上的物理学开始了。

容易想象,印迹、轨迹、轨道等词大量出现在自然科学的文献中。英文文献里被汉译成(轨)迹、轨道的词汇有 trace (track, trail), orbit, trajectory, locus等,其用法可能是跨学科的,它们输入中文语境后难免会将差别给掩盖掉。最常见的用作痕迹的英文词是 trace,如 bear trace (熊迹), wolf trace (狼迹)。Trace 和 track, trail 是同源词,和拖拉机(tractor)一样,都来自拉丁语动词 trahere,拖、拽的意思,因此 trace 和 track, trail 都指运动对象留在身后的印迹。Trace,其作为科学的概念之一是矩阵对角元之和, $\text{Tr}(A) = \sum_i a_{ii}$,汉语就简单地译为“迹”,或矩阵的迹。在量子力学的语境中,力学量对应一个厄米矩阵,则该矩阵的迹就对应力学量的本征值之和。矩阵的对角线为什么称为 trace,我不知道是否有解

释(对角元形象上象雪地上动物留下的一行斜斜的足迹?),不过它和伽罗华理论中的 field trace 的定义形式上可是一样,那里的求和是对一串域扩展(field extensions)的求和,确实有踪迹的意思。由 trace 衍生出的一个概念是 tracer,任何能够泄露痕迹的东西都是 tracer——坚硬路面上行驶过的运粮车,车轮可能没留下痕迹,但是撒的粮食就能泄露车辆行驶的路线,因而粮食是 tracer。发光的分子,具有放射性的原子等,都能泄露其携带者(vector)的踪迹,因而都是 tracer,汉语一般翻译为示踪+(分子、原子……)。

物理文献中常提到的轨道是对 orbit 的翻译。Orbit 来自拉丁语 orbita,它的一个意思是眼窝(eye socket)。Orbit 的本意是 path, track, 它的意思还是圆、轮,因此强调闭合的形象。行星绕太阳以及人造卫星绕地球的路径就是 orbit。在开普勒问题中, $E > 0$ 时行星的运行路线是双曲线, $E = 0$ 时是抛物线;这两种情形,轨迹就是 track 而已,却不能算作 orbit。当 $E < 0$,若行星的 track 是椭圆和圆,这才是 closed orbit。当然, $E < 0$ 时,行星也可能沿螺旋线飞向(spiraling)或者直直地撞向恒星,此时行星的 track 也不是 orbit。可见,orbit 是开普勒问题解的一部分特例(图2)。据说开普勒问题和简谐振动物问题是经典力学中唯一的对任何可能的初始条件都有闭合轨道(closed orbits)的问题,此即所谓的 Bertrand's theorem(伯特兰定理)。注意,闭合轨道不仅意味着运动物体回到曾经历过

的某点,且必须以曾经的速度经过那点,否则那轨道就不是闭合的³⁾。

轨道(orbit)是闭合的,但不必是连续的。其实,第谷关于行星轨道的观测数据也是分立的。从分立的数据去构造连续的轨道(哪里有什么轨道!不过,经典力学里确实有轨道的概念⁴⁾,高斯发明了最小二乘法。在群论中,一个对象在群作用下的集合也称为 orbit。比如,对于一个一般性的点 x ,其在 S_3 群(正三角形的变换群)作用下的轨道由六个点构成(图3)。推广来看,任何变换造成的一串结构,都构成轨道。在 Feigenbaum 的 Computer generated physics 一文中,有 “This meant that at a_∞ a Cantor set was the ‘orbit’” 这样的句子——你看,连与分形有关的康托集也是动力学系统的 orbit 了。将运动看作是一连串的变换,变换的结果就是被变换对象的 orbit——伽罗华理论中的 trace 在这个意义上和 orbit 有完全相同的意义。在更高更抽象的层次上,不同的概念可能汇合了。

Orbit 也作动词用,如 a planet orbiting two suns(同时绕两个太阳运转的行星)。同时绕两个太阳运转的行星被称为 circumbinary planet(绕双星的行星),这样的行星很少见,目前的观测例子有 Kepler-16b。不过,因为其轨道半径太大,看不出和太阳系行星轨道有何区别。

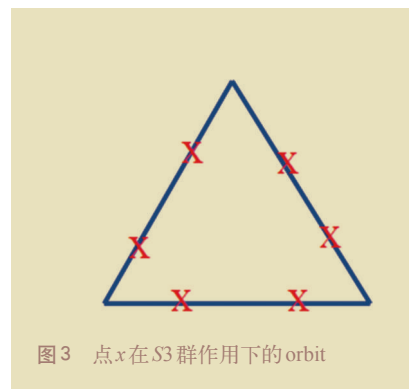


图3 点 x 在 S_3 群作用下的 orbit

3) 现在你明白为什么经典力学要引入相空间的概念了?——笔者注

4) 如果你不明白这句话的意思,请细细品味青原惟信禅师的“老僧三十年前未参禅时,见山是山,见水是水。及至后来,亲见知识,有个人处,见山不是山,见水不是水。而今得个休歇处,依前见山只是山,见水只是水。”这句话(参见《五灯会元》)——笔者注



图4 trajectory, 被击打的高尔夫球划过的径迹

等到人们认识到原子是由原子核和电子组成的, 就想当然地以为电子绕原子核也沿一定的轨道运动(electron orbits the nucleus)。不过按照经典电动力学, the electron will release electromagnetic radiation while orbiting a nucleus (在绕原子核轨道上运动的电子不断发出电磁辐射)。这下麻烦了, 不断辐射电磁波电子应该是向着原子核 spiraling 的, 原子是个不稳定系统, 这与实际观测不符。人们开始怀疑电子轨道之类的概念, Pauli 写道: “I believe that the energy and momentum values of the stationary states are much more real than orbits^[1] (我相信定态的能量和动量的值比轨道更真实)”。海森伯于 1925 年试图抛开“电子轨道”这样的概念而把量子力学建立在谱线位置、谱线强度等可观测量(observable)上, 这是矩阵力学的操作主义(operationalism)思想基础。海森伯在哥廷根给泡利看他关于谱线强度的计算, 并评论道: “Everything is still vague and unclear to me, but it seems as if the electrons will no more move on orbits (一切都还含混不清, 不过(在新理论里)好象电子不再是在轨道上运行了)^[2]”。如今的量子理论认为, 原子中的电子处于一定的状态上, 只有通过跃迁才改

变其状态。这个理论为原子的稳定性找到了一个比较幼稚的说辞。抛开原子的形成与湮灭这类剧烈的变动, 一个原子真的就是稳定的吗? “言天地坏者亦谬, 言天地不坏者亦谬”, 《列子》里的这句话还是值得玩味的。在量子力学中, 波函数描述的是场, 不是轨道, 则轨道角动量就是个误导性的概念。这是历史的遗迹, 学习者不可不察。不过, 电子的自旋角动量似乎也不可那么直观地去理解, 在 Dirac 理论中它表现为对方程形式的要求。对于那些基于自旋—轨道角动量耦合的理论, 似乎应该考虑一下其如何同更高层次的理论相自治。

在普通力学中, 另有一个词 trajectory 也被随意地翻译成轨迹、轨道。Trajectory 来自拉丁语动词 trajicere(抛、扔的意思), 因此它更确切的意思是抛体的轨迹。笔者猜想它强调物体有获得动能的初始时刻且其运动也有终止时刻。Trajectory 是弹道学里的概念, 你把一颗卫星打上去三公里然后看着它掉下来, 你观测到的是一个 trajectory (图4); 只有你把卫星送到足够的高度让它自己绕圈子, 你才能观察到 orbit。当然, orbit 和 trajectory 也混用, 如 “in relativity theory, orbits follow geodesic trajectories (在相对论中, 轨道乃弯曲时空中的测地线)”。

还有一个常被翻译成轨迹的词是 locus。Locus, 拉丁语“地点”的意思, 形容词为 local, 复数形式为 loci, 按定义为满足一个或者几个条件的点的集合。笔者初中数学课上学到的轨迹一词就是它。Locus 强调位置, 而 track, trace, trajectory 强调的是动作的结果, 后者更物理一些。圆锥曲线都是 loci, 抛物线是到一点和一条线距离相等的点的集合, 椭圆是

到两点距离之和为恒定值的点的集合, 等等。从这些字面上的定义来看, 双曲线、抛物线、椭圆、圆好象是不同的事物。如果仅从 locus(位置), trace(径迹)的角度看确实是这样, 但物理学走得更深入一些, 它追问这样的原因是什么。牛顿发现, 若行星与太阳之间的力始终指向太阳且和距离平方成反比, 且和它自身的质量成正比⁵⁾, 则行星的轨道就是以太阳为焦点之一的椭圆轨道。遵循平方反比率的万有引力确立后, 发现开普勒问题的一般解包括双曲线、抛物线等其它可能, 这样这些不同的统称为圆锥曲线的 loci 就统一了。当然了, 这些不同定义的 loci 同属于圆锥曲线的事实, 两千多年前古希腊的 Empedocles(估计是在切萝卜的过程中)就认识到了。注意, 开普勒问题中物体的轨迹, 按照能量从高到低的顺序, 包括双曲线、抛物线、椭圆、圆、直线和点。

物理学首先是关于运动的科学, 关于各种轨迹的概念, 应该深入理解。知道运动的物体, 哪怕是天上的星星, 有迹可循且是可以研究的, 这可算是经典力学的开始。但是原子物理对经典行星轨道概念的引入和抛弃, 这期间科学家遭遇的纠结, 怕是人类的自作多情。轨道, 愚以为, 毕竟是辅助性的概念, 电子之有无轨道, 行星之有无轨道, 都不妨以惟信禅师的眼光观之。

参考文献

- [1] Private letter. Pauli to Bohr. 12 December 1924
- [2] The Birth of Quantum Mechanics (<http://www.vub.ac.be/CLEA/IQSA/history.html>)

5) 和太阳质量成正比这件事, 是不是到广义相对论那里才有意义?

——笔者注