

物理学咬文嚼字之五十八

Norm and Gauge

曹则贤

(中国科学院物理研究所 北京 100190)

学高为师，身正是范¹⁾

不知铸钱有范，而人之求之者，买钱不买范

—— [清] 袁枚《随园诗话》

摘要 汉语的规、范常用来翻译 gauge 和 norm。Norm (normalization, renormalization), gauge 是近代数学和物理的重要概念。规范理论和重整化密切相关。

Dan Brown 的小说 *The lost symbol* 是以德国画家丢勒 (Albrecht Dürer) 的名作 *Melancholia* (忧伤) 为背景展开的 (图 1)。小说里涉及的地下组织是从事 masonry (建筑行当) 的。在这幅画里，你会看到规、矩，还有木匠用的墨斗。这些东西咱们都熟悉，说不定还是从咱们这儿传过去的呢。规、矩都是约束性的工具。要想把事情做得统一、齐整、标准，就需要借助强的约束 (constraint)。木匠用到规、矩，打

土坯的需要用模子，铸造金器要用到范 (繁体字写作“範”) (图 2)，道理是一样的。

规矩和模范可能很早就成了抽象的合成词，所含意图都是对他人的约束。《孟子》有句云：“不以规矩，不能成方圆”，强调统治者要“法先王”²⁾。唐太宗李世民为了让帝二代李治有个帝王样专门编写了《帝范》，明末刘氏为天下妇女编写了《女范》，前者为人立规矩，后者替人树榜样。犹有甚者，我们还把

培养教师弄成了师范事业。要照鄙人的理解，一个人总要学问够大、品行够好才能为人师范的，而这是要经过多年修行才能得来的境界，恐不是什么人都能够的，也不是什么人都愿意的。一个十几岁的小年轻，本身还嗷嗷待哺呢，怎么进了一个师范学校读两年就能成为教师了呢？多吓人。中国目前“读师范去教书”的教育模式，估计也是今天中国教育不堪的一个原因。照着书本去教书，清代袁枚有一句很损的话，叫“遗腹子上坟”，谓之不管哭得怎样真切，毕竟不曾和生父建立起过感情。反过来，若人们是在有了一点人生阅历、思考体验后才去当老师，或许能带出做更大学问的学生，这个社会才能见学问的进步。被誉为“现代分析之父”的大



图 1 (左)丢勒的原作 *Melancholia*; (右)仿作 *Melancholia II* 就是一部浓缩的近代物理

1) 据信此句出自教育家陶行知。学高？身正？几人能够？如何能够？——笔者注

2) 孟子此论是对孔子的“祖述尧舜”思想的继承。一切以先圣为榜样的思想，桎梏中国人的创造力两千余年。而今，人们又走到了另一个极端，言必称“创新”。没有继承底蕴的“山间竹笋”，能创出什么新来？——笔者注



图2 规、矩、模、范

数学家 Weierstrass，就是德国的一个中学教员，这样的中学老师大体说来才是合格的。

师范学校是对西文 normal school 的翻译，而 normal school 是对兴于十六世纪的法国 école normale 的翻译。据说，école normale 是为了给未来的老师们以模范的教室和模范的教师而设立的，有时候是(中小学)学生、老师和老师的(师范)老师同在一个班级里上课。最有名的师范学校要数 école normale supérieure de Paris (俗称巴黎高师)，该校的定位确实是在主流大学

之外的教育场所。这所学校为法国培养了成打的哲学家、作家、数学家、自然科学家和其他门类的精英，为法国贡献了12位诺贝尔奖得主。不过这些得主们若和其校友如傅里叶、伽罗华、萨特等人相比，似乎也不值得一提。这样的 normal school，是当得起“师范”二字的³⁾。

规、矩、模、范对应的词，于人类活动而言太重要了，因此都融入了我们的数学和物理。和 normal 有关的词，如 norm, normalize, normalization, renormalization 都是重要的数学或物理学概念。Norm 来自希腊语 γνῶμων (gnomon)，作为日晷主要部件的矩尺就是 gnomon (图3)。在线性代数中，norm 就是给矢量赋予长度的函数，汉译范数。常见的平面几何中，(x, y) 到原点的距离为 $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ ，这就是欧氏范数。用到 nor-



图3 日晷上的角尺就是 gnomon

mal 的一个重要概念是 normal distribution，即用高斯函数表示的分布，汉译为正态分布。这个看似“normal”的分布，不管是关于物理现象的还是在数论中的，其出现都是有深意的，不妨细察。

动词 normalize 汉译归一化⁴⁾，和“1”有关，但其有几个不同的含义。如果有一组(非负)数值，将所有数值除以最大的那个值，则所有的值就分布在[0, 1]区间了，这是将数据 normalized 了。对于某区间的函数 $f(x)$ ，如除以该区间上的另一个函数 $g(x)$ ，则结果 $f(x)/g(x)$ 可说是关于函数 $g(x)$ normalized 的函数 $f(x)$ 。在统计中，如一个事件之不同结果出现的次数分别为 n_i ，则结果 i 出现的概率约为 $\rho_i = n_i / \sum_i n_i$ ，概率的总和为 1， $\sum_i \rho_i = 1$ 。因此，当量子力学中的波函数被解释为粒子的几率幅时，必然要求 $\int_{\Omega} \psi^* \psi d^3x = 1$ ，这样的波函数我们说是归一化的(normalized)。如果波函数集 ψ_i 满足 $\int_{\Omega} \psi_i^* \psi_j d^3x = \delta_{ij}$ ，则波函数集 ψ_i 是正交归一的(orthonormal)。

在物理学中，时空常常被当作是连续统，但同时还有点粒子(尺度为零)的概念，因此在计算中很容易出现无穷大。比如在经典电动力学中，计算电子在其自身引起的电场中的自能 $\int \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dV$ ，如果把电子当成点电荷，积分就是发散的。在对量子电动力学所作的微扰计算中，积分也是发散的。对付这些无穷大的技巧就是 renormalization technique (重整化技术)。据说，重整化技术已经从令人生疑的权宜之计变成了物理学和数学中自洽的工

3) 多好的教育经，怎么一到咱们这里就给念歪了呢？——笔者注

4) 珠算口诀在九九八十一以后又回到一一得一，故有九九归一的说法。——笔者注

具。重整化问题笔者不懂，但就算重整化技术是自洽的数学工具，电磁学理论中的那些发散似乎也还是由概念的荒唐带来的。

我们所说的圆规，在英文中为 compass，而在很多地方被翻译成“规”的，是 gauge 这个词。Gauge 作为名词，有测量标准、测量工具或方法等意思。比如火车轮轨之间的距离，就是 gauge。我国采用的是 standard gauge，轮距标准为 1435 mm。在真空科学中，离不开的是测量真空度的表，统称为 pressure gauge (压力规) 或者 vacuum gauge (真空规)。有一种测量气压的方式利用和大气压的差别以力学效果来表征待测气压，类似弹簧秤的工作原理。利用电阻在给定气压环境中的散热能力来测量气压的是 Pirani 规，测量气压可低到差不多 10^{-1} Pa。测量高真空和超高真空常用的真空规，典型的有离子规(ion gauge 或 ionization gauge)。图 4 是常见的三电极构型的离子规，内圈是个闭合电路中的灯丝，负责提供电子，中间是栅极，加速电子使得周围的气体离子化，外侧悬空的是收集极(也加电压)负责收集离子电流供测量用。当然，这三个电极也可以反过来布局。测量到的离子电流可标定为气体的电压。这些设备所以称为 gauge，是因为离子流—气压的关系是需要认真校准(gauge)的吧？我们看到，这个所谓的测量真空度的真空规，其实是个电路而已。在不知多少次拆拆装装以后，笔者终于领悟了一套德文电工电子学教程里的一句话(大意)：所有的电工电子学设备，不过就是以某种方式输出电

流或者电压⁵⁾。参考这句话，我有一天明白了一个道理：所谓的理论物理，不过就是构造可以和现实套近乎的加法和乘法而已。

Gauge 作动词，有精确测量、估测、作测量标准、校准、使……符合标准等多重意思，汉译容易有失偏颇。比如，在“The difficulty of interpreting Maupertius can be gauged by reading the original works (诠释 Maupertius 的困难可以通过阅读原文加以 gauge)”，此处的 gauge 译为“(不断)修正”比较合适；在“The scale factor gauging the size of the universe becomes infinite after only a finite time(Gauging 宇宙大小的尺度因子在有限次以后变为无穷大)¹⁾”，则应是“设置标准”的意思；在“to gauge the ebb and flow of water (public opinion)”中，gauge 就是监测；在“The depth of wound felt by the Church can be gauged from the fact that he (Galileo) was not pardoned until about 350 years later²⁾”，gauge 兼有赋予量度和估量的意思；而在“we can pose the question of their cardinality, of their measure, or of a number of other gauges³⁾ ((关于数)我们可以问它的序、测度以及一些别的 gauge)”中，随便将 gauge 翻译成汉语的规范似乎语焉不详。它应该指的是能度量数的一些特征，除了这里提到的 cardinality, measure 以外，比如还有 category (类)。Category 这个数的概念很重要，量子力学如今也发展到 categorical quantum mechanics 了，不知哪年我们的课本里会教授这些内容。

在物理中出现 gauge 作为理论之一部分，是在电磁学中，此时 gauge 被汉译成“规范”。在连续介质电动力学中，电场 E 和磁场 B 只包含物理的自由度，即电磁场构型的每个自由度都对附近的验电荷的运动有单独可测量的效应。引入标量势 φ 和矢量势 A ，则有

$$E = -\nabla\varphi - \frac{\partial A}{\partial t}; \quad B = \nabla \times A$$

但是，对于变换 $\varphi \mapsto \varphi - \partial\psi/\partial t$ ， $A \mapsto A + \nabla\psi$ ，电磁场构型不变。也就是说势具有更多的自由度(规范自由度)。经典电动力学操心的是电荷的运动，直接相关的是电场强度和磁感应强度，势函数可以看作纯粹是数学的存在，仅只是有利于证明或者计算才引入的。规范自由度的问题，当时被认为“是一个简单而略显麻烦的特点”⁴⁾。一个给定的标量势 φ 和矢量势 A 的选择就是一个 gauge；函数 ψ 就是 gauge function，是比“势”高一个层面的量，它是以其时空梯度的形式加到“势”上去的。Gauge fixing 可以有很多种方式⁵⁻⁷⁾。

Gauge 在数学和物理的语境中到底是什么意思，Wiki 上有个比喻，我以为妙极了。设想有一个(数

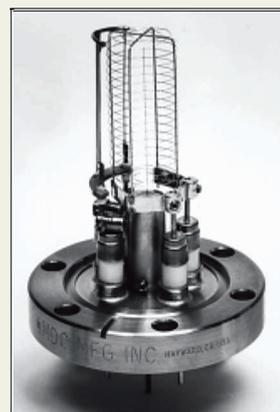


图4 常见的三电极构型的离子规

5) 我永远不会忘记这句话，就是这句话让我经过千辛万苦后也糊弄到了一个实验物理博士学位。而恰恰是因为没能及时悟出我后面所说的那句话，才耽误了我的理论物理博士学位。——笔者注

6) 保持外形不变的圆柱曾被扭过了吗？这也就是理论物理学家和数学家的困惑。晶体学家知道晶体被扭了一下会有什么结果。——笔者注

学的)圆柱, 如果被扭了但又保持圆柱的形状, 你当然无法知道是否发生扭曲了⁶⁾。但是, 若在圆柱的底端到顶端加一条曲线, 则从曲线的变化可以判断是否发生了扭曲。这个过程就是一个 gauge 的过程。这种情形与其说是添加约束, 更准确地说是添加参照! 注意, 这条曲线是从外部加上去的, 不属于考察的对象, 因此也不应该影响考察对象的性质。

一般教科书上介绍的电磁场的规范有库仑(Coulomb)规范和洛仑兹(Lorenz)规范。库仑规范, 是规范矢势 A 的, $\nabla \cdot A = 0$ 。在量子力学中, 这样规定的矢量势是量子化的, 而库仑势, 即标量部分, 则没有。库仑规范的优点是可以将势写成如下形式: $\varphi(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(r', t)}{|r-r'|} d^3r'$; $A(r, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j(r', t)}{|r-r'|} d^3r'$; 即电荷分布产生了势 φ , 电流分布产生了磁矢势, 因果关系明了, 且还是 instantaneous(瞬态的)。所谓的洛仑兹⁷⁾规范是规定了 $(\varphi; A)$ 的梯度的, $\nabla \cdot A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ 。这个洛仑兹规范的一个特点是保持了洛仑兹不变性(Lorentz invariance),

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi = \rho / \epsilon_0,$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \nabla^2 A = \mu_0 j,$$

格式统一, 且具有波动形式。当然

电荷密度和电流密度是满足连续性方程的(没有这一条, 洛仑兹规范是不完全的)。此外还有 Weyl gauge ($\phi = 0$), multipolar gauge, Fock—Schwinger gauge, R_ξ gauge, 等等, 一般教科书基本没有提及。Jackson 在提及规范时, 认为“The choice of gauge is a matter of convenience (规范的选择只不过是为了方便而已)”。规范的选择真的仅仅是为了便利吗?⁸⁾事情的发展, 我指的是后来规范场论的出现, 不仅改变了物理学自己的面貌, 也改变了物理学被发展的方式。它将笔者这样资质平庸的物理学习者挡在了大门之外。

麦克斯韦方程关注的是电场而非电荷本身。电磁学有一个很重要的、前提式的方程, 连续性方程, 或者说是电荷守恒定律。根据 Noether 定理的精神, 守恒律是和对称性相联系的。则寻找关于电荷的定律就变成了找寻那规律应满足的对称性。Hermann Weyl 决定来做这件事。他长时间考虑 Noether 定理和李群的问题, 最后于 1918 年得出结论, 电荷守恒是和另一个他称之为规范对称性(gauge symmetry)相联系的。1929 年, Weyl 建议把替换 $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + \frac{ie}{\hbar} A_\mu$ 当作是可推导出电磁学的原理, 他称之为 gauge principle or minimal principle⁸⁾。这本质上还是最优化, 是 Maupertius 的思想的延续。将广义协变原理应用到

一个规范不变性上, 他从爱因斯坦的理论能得到麦克斯韦方程。Weyl 把他理论中的不变性称为 Eichinvarianz (规范不变性); 规范理论现在在德语中也是被称为 Eichtheorie 的。Eichen, 德语动词, 是“校准、检验”的意思, 见于“die Waage zu eichen (校秤)”, Eichstempel (检验章, 就是盖在猪牛羊肉上的蓝戳)。如从这个意义上来看, 似乎不好理解 Eichtheorie 是干什么的。因此, 它才被认为那可能是张冠李戴, 应该被称为“电磁场的相位理论”⁹⁾才对。

Weyl 的规范理论的后继发展是他本人未能预见到的⁹⁾。1922 年, 薛定谔意识到规范因子的周期性同玻尔的量子化轨道周期性之间的联系。他尝试几种规范因子, 包括 $\gamma = -i\hbar$ 形式的。这实际上表明了 Weyl 的理论就是量子力学里的电磁理论⁴⁾。这一通捣腾在 1925 年结出了硕果, 那年年底薛定谔构造了波动方程, 有了 1926 年分四部分发表的量子力学奠基性文章。1954 年, 杨振宁先生和 Mills 把电荷守恒相关的规范理论推广到同位旋守恒的情形, 于是有了 Yang—Mills 理论。这时人们可以说, 规范自由度演化成了一个基本的对称原则。它差不多同时被数学家发展成纤维丛理论^{4), 10)}。

规范场论遭遇的一个问题是 renormalization, 这是我把 gauge 和

7) 这个洛仑兹是丹麦人 Ludvig Lorenz (1829—1891)。也是捣腾麦克斯韦方程组的那个洛仑兹变换, 是以荷兰人 Hendrik Lorentz (1853—1928) 命名的。至于 1961 年给出三变量一阶微分方程组描述气象变化的美国气象学家, 那是 Edward Lorenz (1917—2008), 见于洛仑兹吸引子 (Lorenz attractor)。中文书中把这三者弄混的有不少。——笔者注

8) 就算仅仅为了方便而已, 那也不是一般物理学家能达到的高度。就象不同的椭圆方程对应不同的有心力问题的难度一样。基于 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 形式的椭圆方程作为平方反比有心力问题的解(之一)的证明, 也亏牛顿他老人家能想得出来。——笔者注

9) Weyl 是一个了不起的物理学家和数学家, 他对量子力学和相对论都有独到的贡献。他把群论的思想引入到物理学的研究当中。如果不是突然去世, 天知道他还能做出哪些出人意料的发现。1955 年, 名满天下的 Weyl 迎来了他 70 岁生日以及雪片般的祝福信件。老先生一封封地回复并自己送到邮局去寄送, 结果在路上不幸摔倒身亡。看到这一点总让我想起《功夫熊猫》里的一句话 “One often meets his destiny on the road he takes to avoid it(规避恰是遭遇命运的原因)。”我觉得这句话不仅是哲学的, 更是物理的。直来直往的因果律, 不足以撑起物理学的全部天空——“原因在结果中”的念头时常出现。这个思想在 Wheeler 的工作中有所表现, 而 Wheeler 对 Weyl 的钦佩之情, 是见于言表的。——笔者注

norm 放在一起咬文嚼字的原因。重整化, 或者使之重归正常, 其实指的是消除计算中的无穷大。因为规范理论一般是高度非线性的, 这不是件容易的事情。1969年荷兰博士生't Hooft 证明了Yang—Mills 场是可重整化的, 把他的导师也推成了诺奖得主。重整化作为一种纲领从上世纪四十年代就为人所理解, 在混沌等其它领域有了应用, 但其依然缺乏牢固的数学基础。许多人是喜欢重整化的。Dirac 曾宣称“...The remarkable agreement between its results and experiment should be looked on as fluke (重整化的结果和实验吻合应作碰巧看待)”。重整化甚至被说成是卑鄙

的、不道德的(By general consensus Renormalization is a sleaze)^[11]。Renormalization 的成功与缺乏数学基础, 让我想起了Madelung 常数的计算。在计算NaCl 晶体的Madelung 常数时, 会遇到级数

$$M = -6 + 12/\sqrt{2} - 8/\sqrt{3} + 6/\sqrt{4} - 24/\sqrt{5} + \dots,$$

你若稀里糊涂地算一下, 会发现 $M \sim -1.74756$, “fitting the experimental result very well (和实验结果吻合得很好)”; 但是你若数学好一点, 你知道这个级数是发散的! 物理使用的数学, 和严谨数学, 到底是怎样的关系呢?

我把gauge 和norm 放在一起咬文嚼字的另一个原因是规范对称性

和波函数的模(norm)也有关。波函数总要求有正定的、满足洛仑兹不变性的模, 但是对于多粒子体系, 这并不总是能做到的。对于自旋整数的粒子, 需要将非物理的负模状态给弄成零, 这时候规范对称性就派上用场了。你看, gauge 在这里又碰上了norm, 而这是量子统计的基础。绝大多数教科书提到统计和自旋的关系时, 都是大大咧咧地说自旋整数的粒子满足玻色—爱因斯坦统计, 而自旋半整数的粒子满足费米—狄拉克统计而不提供得出这个结论的过程。这些物理的事实固然重要, 但如何得出这些发现的过程和方法可能才是我们要真正学会的物理。

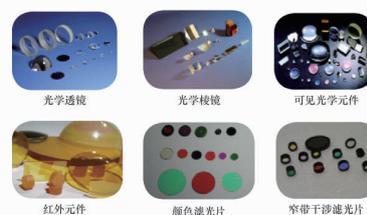
后记 要是你发现本篇关于gauge 的介绍没什么价值, 那是因为我根本就不懂规范场论的缘故。1990年暑假我老师丢给我一本法国人写的量子场论。在闷热的乡下草屋里, 俺努力看来着, 没看懂。原因不外有三: (1)规范场论本身有点难; (2)我基础太差; (3)那个法国人的英语估计是体育老师教的。只能对着一本书看的时代, 看不懂的事情时常发生。在今天信息获取那么容易的社会, 有看不懂的物理书就不应该了——把看不懂的扔到一边, 换本能看懂的, 如此而已。

参考文献

- [1] Frampton P H. Did time begin? Will time end? World Scientific, 2010. p. 74
- [2] Cotterill R. The material world, Cambridge University press, 2008. p.15
- [3] Kninchin A Y. Continued fraction. Dover publications, 1997
- [4] 杨振宁. 曙光集. 三联书店, 2008
- [5] Miller F P, Vandome A F, McBrewster J. Gauge Fixing. International Book Marketing Service Ltd, 2011
- [6] Jackson J D. Am. J. Phys., 2002, 70(9): 917
- [7] Jackson J D, Okun L B. Rev. Mod. Phys., 2001, 73: 663
- [8] Weyl H. Z. für Phys., 1929, 56: 330
- [9] Yang C N. Int. J. Mod. Phys. A, 2003, 18: 3263. 原句为: Weyl in 1929 came back with an important paper that really launched what was called, and is still called, gauge theory of electromagnetism, a misnomer. It should have been called phase theory of electromagnetism.
- [10] WU A C T, Yang C N. Int. J. Mod. Phys., 2006, 21: 3235
- [11] Rothman T, Sudarshan G. Doubt and certainty. Helix books, 1998. pp. 13-14

标准光学元件库存--- 供您随时选用

总量多达10万片, 超过700个品种规格的透镜, 棱镜, 反射镜, 窗口, 滤光片等常用光学器件; 涵盖紫外, 可见, 近红外, 红外等光学应用领域。



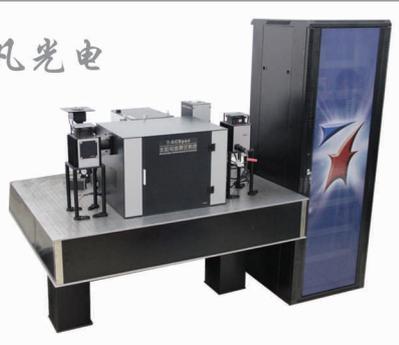
光学透镜 光学棱镜 可见光学元件

红外元件 颜色滤光片 窄带干涉滤光片

GW 北京歌普特科技有限公司
Beijing Golden Way Scientific Co., Ltd

地址: 北京市朝阳区酒仙桥东路1号M7栋5层东段
电话: 010-88096218/88096099 传真: 010-88096216
邮箱: optics@goldway.com.cn

赛凡光电



多功能太阳能电池光谱性能测试系统