

为什么你很难分开书页交错的两本书？

(中国科学院物理研究所 厚美瑛 编译自 Kari Dalnoki-Veress *et al. Physics Today*, 2016, (6): 74, 原文详见 <http://ptonline.aip.org>)

这是由于书页交错的方式使得你越用力拉，书页间的摩擦力就会越大。

摩擦学的研究源远流长。列奥纳多·达文西告诉我们，一个物体开始滑动时受到的摩擦力(或叫牵引力)，可由一个简单的公式描述： $T = \mu N$ ，其中 N 是负载，或正压力， μ 是摩擦系数。达文西认为 μ 的值是固定的，等于 $1/4$ 。然而阿蒙顿和库仑后来发现 μ 并不是普适的，它的值取决于滑动物体和滑动物体所在平面的性质。总的来说，经典的阿蒙顿—库仑定律告诉我们，滑动时的摩擦力与接触面积和滑动速度无关，只与正压力有关(正比于正压力)。

阿蒙顿—库仑定律的摩擦力与接触面积无关不符合我们的直观感受；事实上，直到20世纪中期，泰

伯和波顿对此才有了完整的解释。近年由于计算机和科技的进步，如原子力显微镜、表面力仪和石英晶体微天平的出现，再次引发了人们对摩擦学研究的兴趣。我们现在知道，许多系统，特别是在(或接近)纳米级的系统，表现出的行为比阿蒙顿和库仑预想的要复杂得多。以多壁碳纳米管为例，在由内外管滑过彼此来研究真正分子层级的摩擦实验中，人们发现了摩擦消失和摩擦与接触面积有关等令人惊讶的现象。无论如何，经典的阿蒙顿—库仑定律在一般情况仍然适用。

试着从书脊拉开两本书页交错的电话簿，你会发现你无法将它们

拉开。如上图所示，书页间累积的摩擦力如此之大，即使用一辆汽车的重量也无法将之分开。你可以尝试自己做一组更具启发性的实验：拿两本书页可以很容易拆卸的装订完好的笔记本，首先将两本笔记本的书页交错起来，你会发现分开它们之间的牵引需要巨大的力。但是如果现在你将笔记本的书页每隔一页去掉一页，再重复刚才的实验，此时，你会发现分开两本笔记本变得毫不费力。

拿一个像弹簧秤一样的测量装置，你可以进一步测量牵引力。如果你的秤足够灵敏，你会发现在交替拆卸书页并保持剩余书页相互平



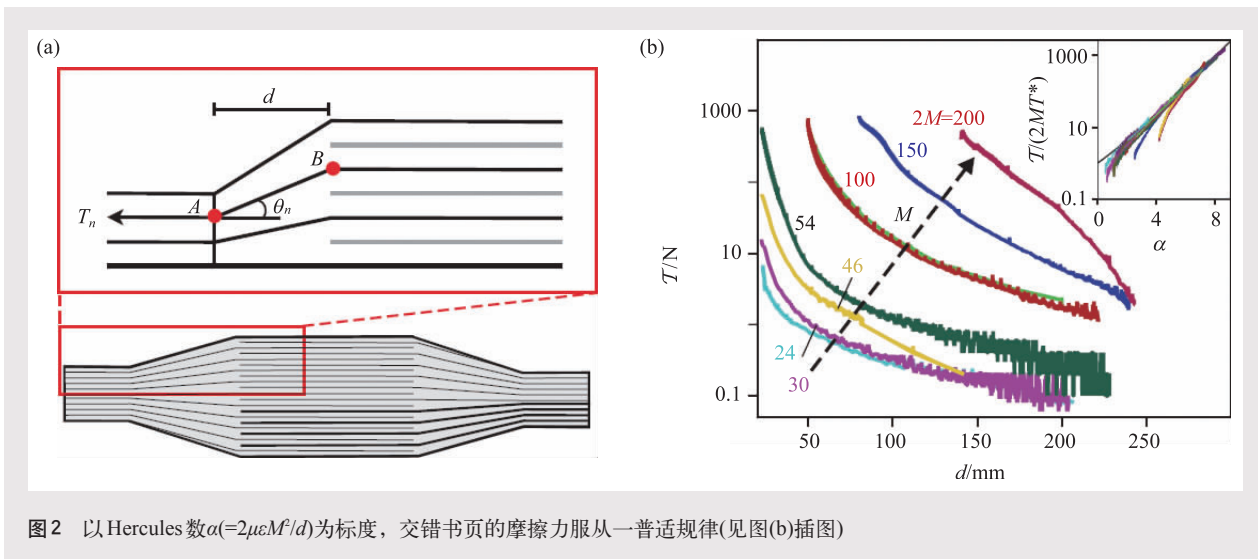


图2 以Hercules数 $\alpha=2\mu\epsilon M^2/d$ 为标度, 交错书页的摩擦力服从一普适规律(见图(b)插图)

行时, 牵引力正比于书页张数。在每个界面上的摩擦是很小的, 所以很容易分开两本笔记本。相反地, 如果不拆卸书页, 书页重叠的部分会被撑厚, 使得这部分的牵引力大于书页被拆卸的情况, 并使得牵引力随书的页数急剧增加。作者的团队实验发现, 增加10倍书页的页数, 牵引力可能被增强4个数量级以上。这现象虽然经常被演示, 但却没有得到太多的定量或理论上的关注。下面我们会看到摩擦力被放大的秘密在于纸张接近重叠区域的角度。

实验中的小册子是用宽度 $w=12\text{ cm}$, 长度 $L=25\text{ cm}$, 厚度 $e=0.01\text{ mm}$ 的纸做的。册子的总张数为 $2M$, 实验中 $2M$ 从24页改变到200页。以恒定的速度(通常为 1 mm/min)拉开书页, 用拉力仪测量小册子被垂直拉起的总牵引力。如图2(a)所示, d 为夹子到重叠区域的距离。实验中对不同距离 d , 间歇地测量对应的摩擦力。图2(a)给出了交错书页的几何图示并标示了一些重要参

数。图2(b)提供了测量结果分析, 清楚地表示出牵引力 T 与页数 $2M$ 和距离 d 的非线性变化关系。

图2(a)帮助我们理解导致摩擦力放大的机理: 由图2(a)可以看到第 n 页纸与平行纸张间的夹角为 θ_n , A 处的牵引力 T_n 给了 B 处一个垂直于纸面的力 $T_n \tan \theta_n$ 。这就造成了一个自放大的抗牵引力摩擦阻力, 拉力越大, 摩擦阻力就会越大。

总的牵引力 T 等于局域牵引力 T_n 的总和。当 M 很大时, 引入一个量 $z=n/M$, 牵引力可定义成一个连续函数 $T(z)=T_n$ 。定义一个无量纲放大参数 $\alpha=2\mu\epsilon M^2/d$, $T(z)$ 可用一常微分方程 $T'(z)+2\alpha zT(z)=0$ 来描述, 其中 $T'(z)$ 是 T 对 z 的一阶微分。取边界条件 T^* 为最外一页纸的牵引力。纸张间牵引力的来源可能来自于纸张弯曲时的弹性张力或任何微小粘附力所引起的摩擦力。积分后可解得总的牵引力为 $T=2MT^* \cdot (\pi/4\alpha)^{1/2} \cdot e^{-\alpha} \cdot \text{erf}(\sqrt{\alpha})$, 其中 erf 为误差函数。

当 α 接近于零时, 即纸面平行

或角度很小时, $T=2MT^*$, 这时总牵引力为单张纸摩擦力 T 的叠加。一般来说, 总牵引力以指数形式依赖于放大参数 α , 此参数被赋予了一个可爱的名字“大力神数”。如图2(b)的插图所示, 以 α 为参数, 归一化的牵引力曲线能很好地重合在一起。

这种由拉力引起的摩擦力增强现象在其他一些体系中也能看到。中国指套就是这样的一个例子。手指插入这样的编织套, 由于套管的张力收紧, 手指很难抽出。外科医生所使用的手指套缝线术也是基于这一原理。同样的, 船用绞盘停泊也是同理, 绳子越被拉伸, 摩擦力越大, 在绞盘上收得越紧。摩擦放大机制还可在生物分子链的加强拉伸应力和促进细胞粘附中看到。本文所阐明的书页交错电话本的摩擦力增强现象应还能有助于澄清更为复杂的像生物体和纳米装置等交错系统的力学行为。